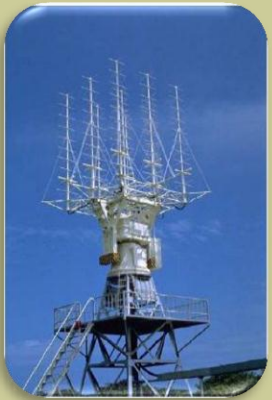


Agrupación de antenas tipo Yagi-Uda

Antenas y Propagación

Tema 5

Agrupación de Antenas Lineales

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

Índice:

Análisis de Agrupaciones

1. Introducción al análisis de agrupaciones lineales de antenas
2. Principio de multiplicación de diagramas. Factor de array.
3. Agrupación lineal uniforme.
4. Directividad de agrupaciones lineales.
5. Agrupaciones bidimensionales

Síntesis de Agrupaciones

6. Introducción a la síntesis de agrupaciones lineales de antenas
7. Método de Schelkunoff
8. Síntesis de Fourier
9. Síntesis de Dolph-Chebyshev

Agrupación de antenas dipolo

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

1.- Introducción al análisis de agrupaciones lineales de antenas

Las antenas estudiadas hasta ahora presentan como característica un gran ancho de haz por lo que conllevan una baja directividad debido principalmente a que las dimisiones de la misma no suelen ser mayores de una longitud de onda. Una forma de solucionar este problema es mediante la agrupación de antenas lineales alimentadas con amplitudes y fases determinadas de tal forma que se obtenga el diagrama de radiación deseado.

El uso de las agrupaciones de antenas está muy extendido y sus aplicaciones muy diversas entre las que se incluyen la síntesis de un diagrama de radiación con una directividad, ancho de haz o nivel del lóbulo principal al secundario dado.

En una agrupación de elementos idénticos existen cinco variables de control que permiten configurar el diagrama de radiación de la antena:

1. La configuración geométrica de la agrupación total (lineal, circular, rectangular, tridimensional, etc)
2. El desplazamiento relativo entre los elementos
3. La amplitud de la excitación de los elementos individuales
4. La fase de la excitación de los elementos individuales
5. El diagrama de radiación de cada elemento individual

2.- Principio de multiplicación de diagramas. Factor de array

Se define una agrupación como un conjunto de N antenas iguales que radian o reciben de forma simultanea. Para antenas transmitiendo el campo radiado se obtiene como interferencia de las N antenas radiando a la vez, mientras que para antenas recibiendo, éste se obtiene como combinación lineal de todas las señales que se reciben de forma individual.

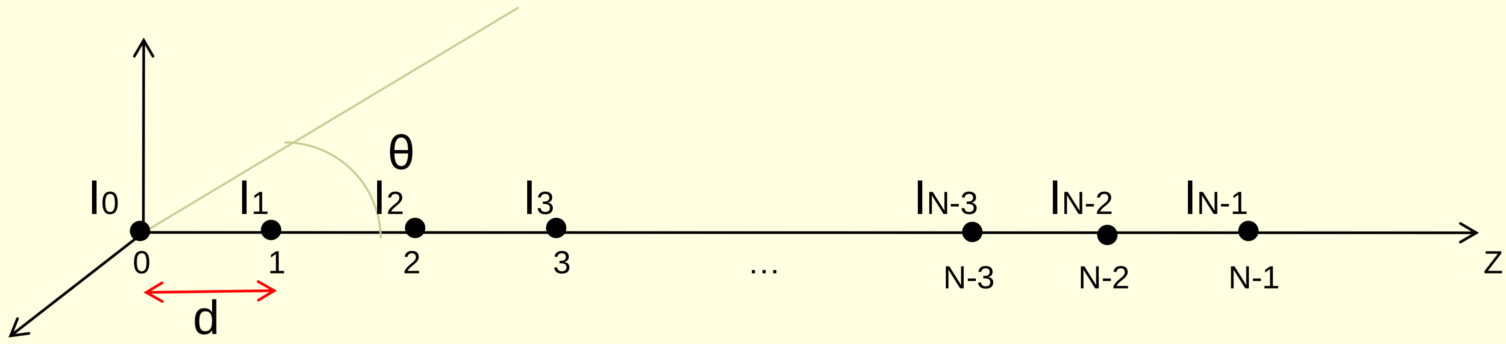
Los elementos componentes de un array pueden ser cualquier antena (antenas de parche, ranura, etc.) aunque los más habituales suelen ser antenas eléctricamente pequeñas como los dipolos. En radioastronomía es usual utilizar antenas eléctricamente grandes para conseguir haces extremadamente estrechos.

La clasificación más sencilla de los array se hace atendiendo a su geometría y podemos encontrar:

- Arrays lineales. En este tipo de agrupación los elementos se disponen a lo largo de una recta pudiendo estar equiespaciados o no.
- Arrays planos. En este caso los elementos se sitúan sobre un plano. Las agrupaciones mas usadas de este tipo son las circulares y las reticulares (rectangulares, triangulares, etc.)
- Arrays tridimensionales. En este configuración, los elementos se sitúan en un volumen.

Esta clasificación no es única ya que también se pueden clasificar atendiendo a su alimentación y en este caso se tendrían arrays de alimentación uniformes, triangulares y binomiales, etc.

Supongamos una distribución lineal de N antenas iguales equiespaciadas una distancia d a lo largo del eje Z, tal y como se muestra en la figura



Cada una de las antenas están alimentadas con una corriente In.
Si el vector de radiación de la antena básica (la situada en el origen de coordenadas) viene dado por $\vec{N}_0(\vec{r})$, el vector de radiación de toda la agrupación puede obtenerse como

$$\vec{N}(\vec{r}) = \vec{N}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\omega_z n}$$

donde ω_z se denomina frecuencia digital a lo largo del eje z y representa el producto de la frecuencia espacial k_z por el periodo de muestreo d, esto es, $\omega_z = k_z d = kd\cos\theta$ donde θ es el ángulo que forma la dirección de radiación con el eje de la agrupación. El vector de radiación puede escribirse entonces como

$$\vec{N}(\vec{r}) = \vec{N}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\omega_z n} = \vec{N}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jnkd\cos\theta}$$

En general el fasor alimentación puede presentar una fase progresiva entre cada par de antenas, tomando como origen de fases la antena básica localizada en el origen de coordenadas, esto es, $I_n = a_n e^{jn\alpha}$ por lo que el vector de radiación queda

$$\vec{N}(\vec{r}) = \vec{N}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jnkd\cos\theta} = \vec{N}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn(kd\cos\theta + \alpha)}$$

Una vez obtenido el vector de radiación, pueden obtenerse otros vectores como por ejemplo los campos de radiación,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r})\sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\left(kd\cos\theta+\alpha\right)}$$

Estas expresiones se pueden simplificar si se escribe en términos del ángulo eléctrico Ψ el cual se define como $\Psi = kd\cos\theta + \alpha$ el cual representa la diferencia de fases entre las contribuciones en campo lejano de 2 antenas consecutivas. El campo de radiación en términos del ángulo eléctrico será pues

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r})\sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\Psi}$$

Como puede verse el diagrama de radiación en campo es el diagrama de radiación en campo de la antena básica multiplicada por un factor que tiene en cuenta las interferencias de las N ondas generadas por las N antenas. A esta expresión se le denomina principio de multiplicación de diagramas.

Al factor

$$F_A\left(\Psi\right)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n e^{jn\Psi}$$

se le denomina factor de array y depende sólo de la separación entre antena , la frecuencia de trabajo y de la alimentación. Este factor presenta las siguientes propiedades:

✓El factor de array es una función periódica del ángulo eléctrico y de periodo 2π
✓El factor de array representa la transformada de Fourier de la secuencia discreta de los coeficientes de alimentación a_n
✓El factor de array puede interpretarse como el diagrama de radiación de N antenas isótropas
✓Si los coeficientes de alimentación son reales y positivos, el máximo del factor de array se ubica en ψ=0, esto es,

$$F_A(\Psi)=\left|\sum_{n=0}^{N-1}a_n e^{jn\Psi}\right|\leq\left|\sum_{n=0}^{N-1}a_n\right|=F_A(0)$$

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

✓Dado que el ángulo real θ que nos define la dirección de radiación oscila entre 0 y π, el ángulo eléctrico lo hará entre kd+α y –kd+α, esto es, $\Psi \in [-kd+\alpha, kd+\alpha]$ sólo la parte del factor de array comprendido en este intervalo pertenece al diagrama de radiación y por tanto a este intervalo se le denomina margen visible. La longitud del margen visible es de 2kd centrada en ψ=α, por lo que este margen dependerá de la longitud de onda, el espaciado de la agrupación y de la fase progresiva de la alimentación.

✓Para coeficientes de alimentación reales y positivos, cuando el margen visible incluye el origen ψ=0, se tiene que la dirección de máxima radiación en el espacio real viene dado por:

$$\Psi = 0 = kd\cos\theta_{\text{máx}} + \alpha \Rightarrow \theta_{\text{máx}} = arc\cos\left(-\frac{\alpha}{kd}\right)$$

Luego la dirección del lóbulo principal del diagrama de radiación puede controlarse mediante la fase progresiva del fasor alimentación. Este es el funcionamiento de los radares de barrido de fase (phased array).

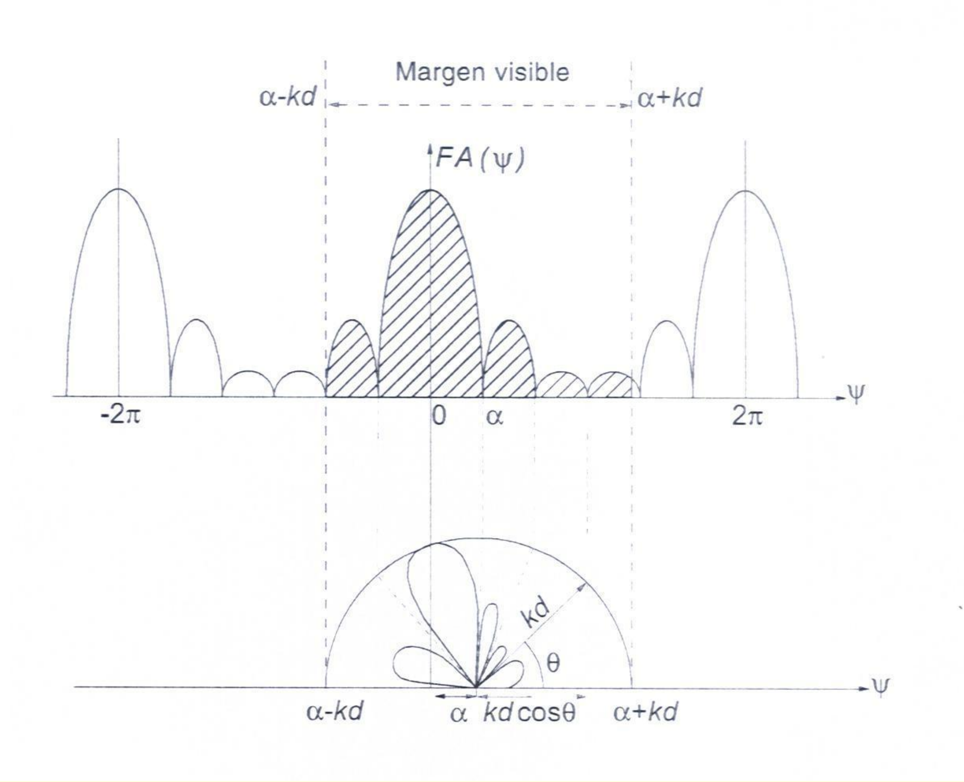
Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

Mediante la representación del factor de array $F_A(\psi)$ en cartesianas puede obtenerse el diagrama del factor de array en el espacio real $F_A(\theta)$ en polares mediante un método gráfico. El procedimiento es el siguiente:

a) Representar gráficamente en coordenadas cartesianas el módulo del factor de array para obtener el diagrama de radiación de campo o el módulo al cuadrado para el diagrama de radiación en potencia.

b) Trazar bajo la gráfica anterior un circulo de radio kd centrado en $\psi=\alpha$

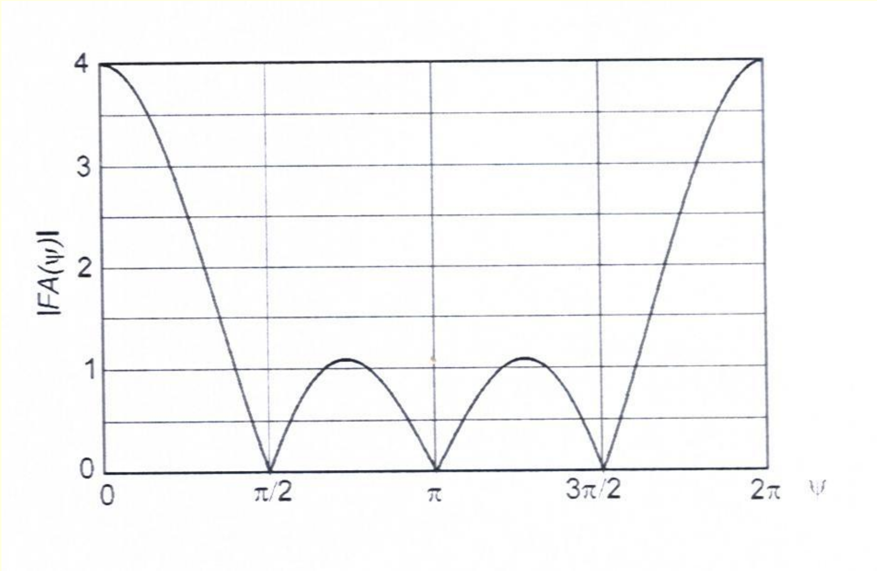
c) Obtener en primer lugar las direcciones de los nulos, para ello se trazan rectas verticales hasta su intersección con la circunferencia y a partir de esta se llevan al centro de las misma



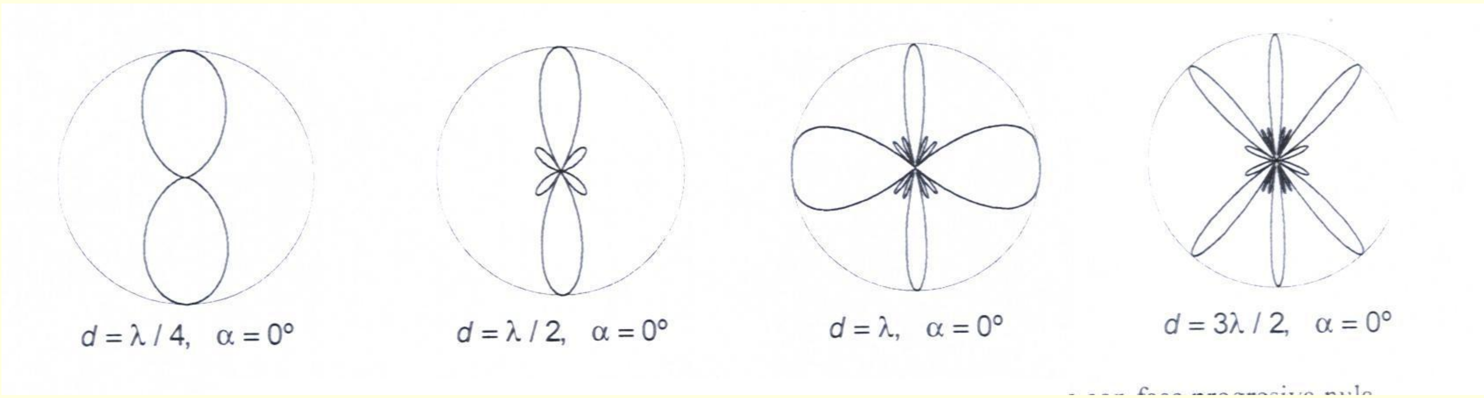
d) Obtener de forma análoga las direcciones de los máximos relativos de cada lóbulo.
e) Dado que el factor de array depende sólo de la coordenada angular θ y no de la coordenada Φ, el diagrama ha de ser simétrico respecto de ésta coordenada, por lo que el diagrama representado corresponde a la mitad del diagrama total

El método gráfico permite observar fácilmente la variación del diagrama en el espacio real en función de los parámetros de la agrupación. En la figura se representa en coordenadas cartesianas el factor de una agrupación de 4 elementos alimentados con igual amplitud.

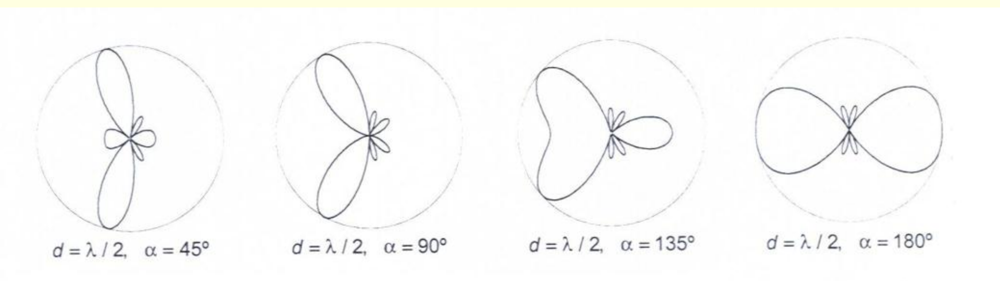
En la figura de la transparencia siguiente se representa el efecto, en el espacio real, de la variación del espaciado

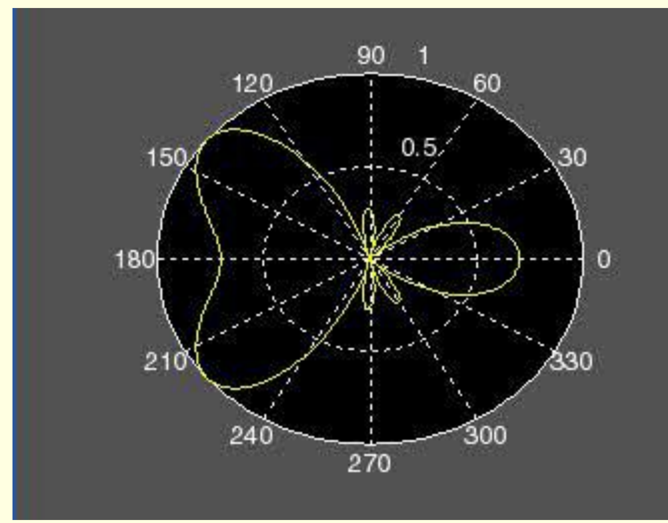


Variación del espaciado



Variación de la fase progresiva





$$\theta_{\text{máx}} = arc\cos\left(-\frac{\alpha}{kd}\right)$$

En general las interferencias constructivas (valores máximos del diagrama de radiación) se dan para valores de ángulos eléctricos de Ψ=0 y para los valores de Ψ=±2π lo que implican direcciones en el espacio real de

$$\Psi = kd\cos\theta_{máx} + \alpha = 2m\pi \Rightarrow \theta_{\mathrm{m}áx} = \arccos\left(\frac{2m\pi - \alpha}{kd}\right)$$

mientras que las interferencias destructivas (valores nulos del diagrama de radiación) se darán para valores de Ψ=±π, esto es, para valores en el espacio real de

$$\Psi = kd\cos\theta_{mín} + \alpha = (2m+1)\pi \Rightarrow \theta_{\mathrm{m}ín} = \arccos\left(\frac{(2m+1)\pi - \alpha}{kd}\right)$$

Se puede definir la variable compleja z, cuyo módulo es 1 y cuya fase corresponde a la fase de la señal (diferencia de caminos y red de alimentación), como

$$z = e^{j\Psi}$$

Para cada agrupación podemos definir el polinomio de la agrupación como la transformada Z de la secuencia de alimentación (al igual que se hizo con el factor de array como transformada de Fourier de la secuencia de alimentación a_n)

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{N-1} z^{N-1}$$

donde z es la variable compleja. De este definición y de la definición de factor de array podemos ver que

$$F_A(\Psi) = P(z)\big|_{z=e^{j\Psi}}$$

por lo que el factor de array corresponde al polinomio de la misma muestreado sobre la circunferencia de radio unidad.
Estos polinomios pueden factorizarse en función de sus ceros z_n, los cuales serán en general complejos, de la forma

$$P(z) = a_{N-1} \prod_{n=1}^{N-1} \left(z - z_n \right)$$

Veamos el análisis de algunas distribuciones de corriente típicas

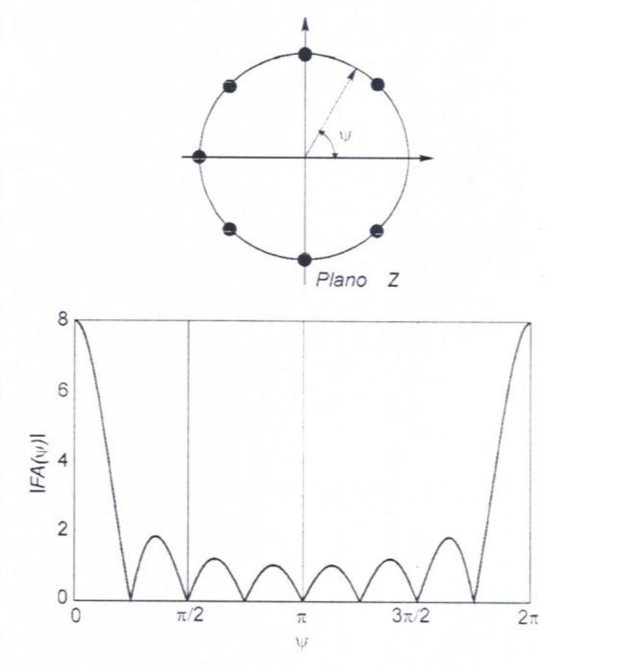
Distribución de corriente uniforme

Esta distribución de corriente es aquella en la que se alimenta todas las antenas con igual amplitud. En este caso la secuencia de alimentación (valor de la corriente referida a la antena básica) es a_n=1 y el valor del polinomio de la agrupación viene dado por

$$P(z)=\sum_{n=0}^{N-1} z^n = 1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}=\frac{z^N-1}{z-1}$$

Como vemos, los ceros de este polinomio son las raíces N-ésimas de la unidad, salvo la z=1 y por tanto todos estos ceros se encuentran localizados en el plano complejo equiespaciados sobre el circulo de radio unidad.

$$\Psi = n\frac{2\pi}{N}$$



Como las raíces N-ésimas de la unidad se encuentran equiespaciadas sobre el circulo de radio unidad, el ancho del haz entre ceros es

$$\Delta\Psi_c = \frac{4\pi}{N}$$

El factor de array se puede obtener del polinomio de la agrupación como

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

$$F_A(\Psi) = P(z)\Big|_{z=e^{j\Psi}} = \left|\frac{z^N - 1}{z-1}\right|_{z=e^{j\Psi}} = \left|\frac{e^{jN\Psi}-1}{e^{j\Psi}-1}\right| = \frac{\left|sen\left(N\frac{\Psi}{2}\right)\right|}{\left|sen\left(\frac{\Psi}{2}\right)\right|}$$

Como se puede ver corresponde a la transformada de Fourier del pulso muestreado.
El factor de array en el origen vale $F_A(0)=N$, mientras que el primer lóbulo secundario se localiza en $\Psi=3/2(2\pi/N)$, por lo que el valor del factor de array es de

$$F_A\left(\frac{3}{2}\frac{2\pi}{N}\right) = F_A\left(\frac{3\pi}{N}\right) = \frac{\left|sen\left(\frac{N}{2}\frac{3\pi}{N}\right)\right|}{\left|sen\left(\frac{1}{2}\frac{3\pi}{N}\right)\right|} = \frac{\left|sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|}{\left|sen\left(\frac{3\pi}{2N}\right)\right|} = \frac{1}{\left|sen\left(\frac{3\pi}{2N}\right)\right|}$$

y la relación lóbulo principal a lóbulo secundario es de

$$NLPS = \frac{F_A(0)}{F_A\left(\frac{3\pi}{N}\right)} = \frac{N}{\dfrac{1}{\left|sen\left(\frac{3\pi}{2N}\right)\right|}} = N\left|sen\left(\frac{3\pi}{2N}\right)\right|$$

Para un número muy elevado de antenas se tiene que $\lim_{N\to\infty} NLPS = \frac{1}{0.217} = 13.2dB$

Distribución de corriente triangular

La distribución triangular se define sólo para un número impar de antenas y su secuencia de alimentación viene dada por

$$a_n = \begin{cases} n+1 & n < \dfrac{N}{2} \\ N-n & n > \dfrac{N}{2} \end{cases}$$

El polinomio de la agrupación es $P(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{N-1} z^{N-1}$

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

$$P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + 3z^{N-3} + 2z^{N-2} + z^{N-1} = \left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} z^n\right]^2 = \left[\frac{z^{\frac{N+1}{2}} - 1}{z - 1}\right]^2$$

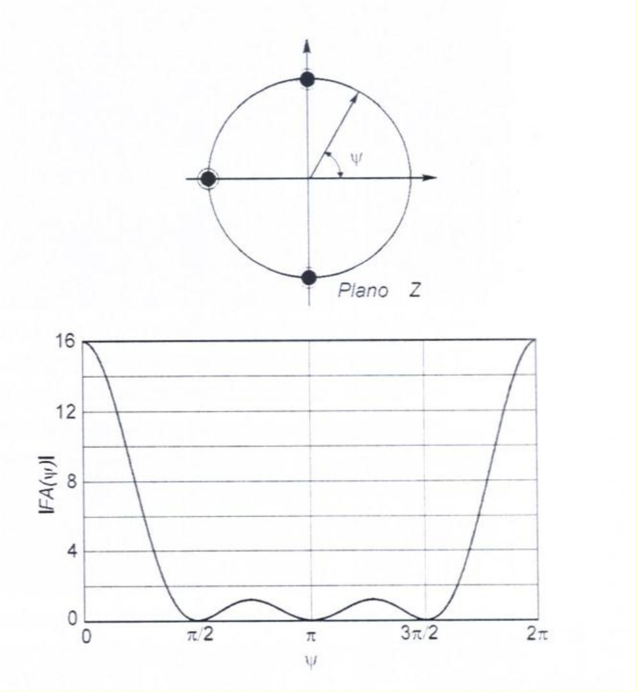
En este caso los ceros del polinomio corresponden a los ceros de la distribución uniforme considerando sólo las (N+1)/2 antenas y además como ceros dobles.

El ancho del haz entre ceros corresponderá al del caso de alimentación uniforme pero considerando sólo las (N+1)/2 antenas, esto es

$$\Delta\Psi_c = \frac{8\pi}{N+1}$$

Que corresponde, aproximadamente, al doble del ancho del haz entre ceros de la distribución de corriente uniforme.

El factor de array será el de la uniforme considerando solo las (N+1)/2 antenas, esto es,



$$F_A(\Psi)=\frac{\left|sen\left(\frac{N+1}{4}\Psi\right)\right|^2}{\left|sen\left(\frac{\Psi}{2}\right)\right|^2}$$

Cuya representación es la mostrada en la figura anterior. Como se puede ver el ancho de los lóbulos son mayores que los de la uniforme y eso es debido a la presencia de los ceros dobles frente a los ceros simples de la uniforme.

La NLPS viene dada por

$$NLPS=\frac{F_A(0)}{F_A\left(\frac{3}{2}\frac{4\pi}{N+1}\right)}=\left(\frac{N+1}{2}\right)^2\left|sen\left(\frac{3\pi}{N+1}\right)\right|^2$$

Para un número muy elevado de antenas se tiene $\lim_{N\to\infty} NLPS=\left(\frac{1}{0.217}\right)^2=26.4dB$ que corresponde al doble de la distribución uniforme

Distribución de corriente binómica

Esta distribución viene definida por el polinomio

$$P(z)=(z+1)^{N-1}=\binom{N-1}{0}+\binom{N-1}{1}z+\binom{N-1}{2}z^2+\cdots+\binom{N-1}{N-1}z^{N-1}$$

donde los coeficientes del polinomio pueden obtenerse como

$$a_n=\binom{N-1}{n}=\frac{(N-1)!}{n!(N-1-n)!}$$

De la definición del polinomio, se observa que presenta sólo un cero de orden N-1 y situado en z = -1 tal y como se puede ver en la grafica siguiente.

El ancho de haz entre ceros vale $\Delta\Psi_c=2\pi$ y no existen lóbulos secundarios aunque pueden aparecer en el espacio real debido a los lóbulos de difracción (grating lobes).

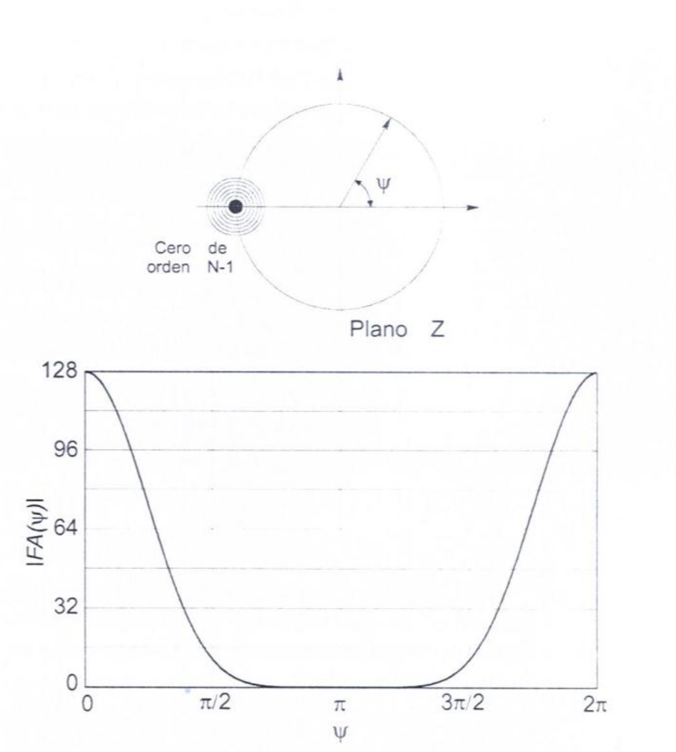
El factor de array se obtiene como

$$F_A(\Psi)=P(z)\big|_{z=e^{j\Psi}}\Rightarrow\left|F_A(\Psi)\right|=\left|2\cos\left(\frac{\Psi}{2}\right)\right|^{N-1}$$

Cuya gráfica es la mostrada en la figura.

En resumen, la siguiente figura muestra las diferencias entre las distintas distribuciones del factor de array para varios elementos de la agrupación

Distribución	Transformada	Primer cero	NLPS
$\sum_{n=0}^{N-1} z^n$	$\dfrac{\left\lvert sen\left(N\dfrac{\Psi}{2}\right)\right\rvert}{\left\lvert sen\left(\dfrac{\Psi}{2}\right)\right\rvert}$	$\dfrac{2\pi}{N}$	13.2
$\left(\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} z^n\right)^2$	$\dfrac{\left\lvert sen\left(\dfrac{N+1}{4}\Psi\right)\right\rvert^2}{\left\lvert sen\left(\dfrac{\Psi}{2}\right)\right\rvert^2}$	$2\dfrac{2\pi}{N+1}$	26.4
$(z+1)^{N-1}$	$\left\lvert 2\cos\left(\dfrac{\Psi}{2}\right)\right\rvert^{N-1}$	π	-

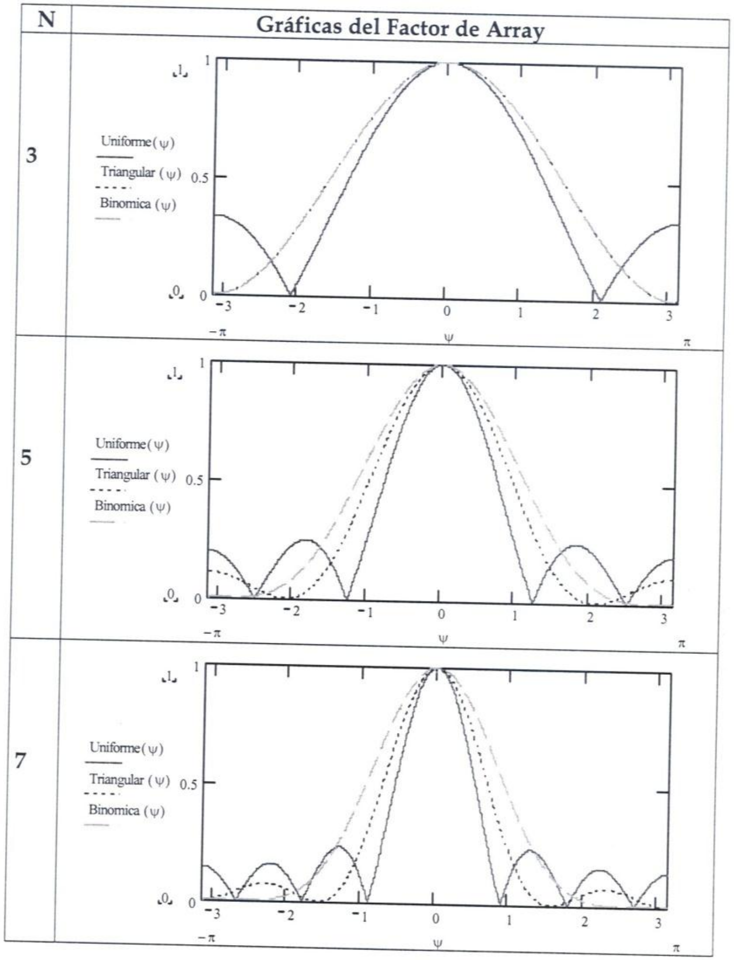


En ella se observa:

• A igualdad de máximo de la distribución de corrientes, la uniforme es la que radia el mayor campo en la dirección del haz principal mientras que la que radia menor campo es la binómica.

• La distribución uniforme presenta el mínimo ancho de haz. El de la triangular es aproximadamente el doble y el de la binómica mucho mayor.

• la distribución uniforme presenta el peor nivel de NLPS, el de la triangular el doble y la binómica presenta sólo un lóbulo



3.- Agrupación lineal uniforme

Como se ha visto en el apartado anterior, la distribución de corriente uniforme es la que presenta las características mas interesantes y por tanto es la mas usada. Por este motivo es interesante ver algunas otras propiedades.

Hemos visto anteriormente que los máximos se producen en posiciones de Ψ=0, por lo que la fase progresiva que nos da esta posición será $\alpha = -kd\cos\theta_{\max}$ y por tanto el desfase eléctrico viene dado por

$$\Psi = kd\cos\theta - kd\cos\theta_{\max} = kd\left(\cos\theta - \cos\theta_{\max}\right)$$

Dado que los ceros adyacentes al máximo se ubican en posiciones $\Psi_c = \pm\frac{2\pi}{N}$ el ancho del haz entre nulos en el espacio real

$$\Psi_c = \pm\frac{2\pi}{N} = kd\left(\cos\theta - \cos\theta_{\max}\right) \Rightarrow \Delta\theta_c = ar\cos\left(\cos\theta_{\max} - \frac{\lambda}{Nd}\right) - ar\cos\left(\cos\theta_{\max} + \frac{\lambda}{Nd}\right)$$

expresión que no es válida para $\theta_{\max} = 0$ ya que uno de los ceros que limitan al lóbulo principal cae fuera del margen visible y el otro dentro.

De igual forma se obtendría el ancho de banda a -3dB y cuyo valor es de

$$\Delta\theta_{-3dB} = arc\cos\left(\cos\theta_{\max} - 0.44\frac{\lambda}{Nd}\right) - arc\cos\left(\cos\theta_{\max} + 0.44\frac{\lambda}{Nd}\right)$$

Agrupación transversal y longitudinal

Las expresiones anteriores, obtenidas para direcciones del lóbulo principal en el espacio real arbitrarias, pueden simplificarse si se consideran casos particulares en los que la dirección de máxima radiación sea transversal respecto al eje de la agrupación (dirección broadside) o que sea longitudinal (dirección endfire) respecto al mismo eje. Estudiemos cada caso particular

- Agrupación transversal (broadside)

En este caso el ancho del haz entre ceros se obtiene substituyendo el valor de $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$ esto es,

$$\Delta\theta_c = ar\cos\left(\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda}{Nd}\right) - ar\cos\left(\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{Nd}\right) \approx 2\left(\frac{\lambda}{Nd}\right) = 2\frac{\lambda}{L}$$

donde L es la longitud física de la agrupación. Como se puede ver el ancho del haz es inversamente proporcional a la longitud física de la antena.

De igual forma, el ancho del haz a -3dB puede obtenerse

$$\Delta\theta_{-3dB} = arc\cos\left(\cos\theta_{\max} - 0.44\frac{\lambda}{Nd}\right) - arc\cos\left(\cos\theta_{\max} + 0.44\frac{\lambda}{Nd}\right) \approx 2\left(0.44\frac{\lambda}{Nd}\right) = 0.88\frac{\lambda}{L}$$

❑ Agrupación longitudinal (endfire)

La agrupaciones de tipo longitudinal presentan el máximo en la dirección del eje, lo que implica una fase progresiva de $\alpha = -kd\cos 0 = -kd$, o mas general $\alpha = \pm kd$

En esta configuración uno de los ceros se ubica fuera del margen visible, por lo que el ancho del haz entre ceros se obtiene como el doble de la distancia en ángulo eléctrico entre el máximo en el eje y el primer nulo de radiación, esto es,

$$\Delta\theta_c = 4arcsen\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2Nd}}\right) = \sqrt{\frac{8\lambda}{Nd}}$$

mientras que el ancho a -3dB nos da

$$\Delta\theta_{-3dB} = 4arcsen\left(\sqrt{0.22\frac{\lambda}{Nd}}\right) \approx \sqrt{3.5\frac{\lambda}{Nd}}$$

4.- Directividad de agrupaciones lineales

La directividad de una agrupación es uno de los parámetros de antena más importantes ya que nos da una medida de la capacidad de un array de concentrar el haz principal en una o varias direcciones del espacio.

En este apartado obtendremos una expresión general para la directividad en función de los parámetros de la agrupación como son la distribución de corriente, el espacio entre elementos, la frecuencia y la fase progresiva.

Consideremos una agrupación en la que los coeficientes de la alimentación son reales y positivos, de forma que el máximo de la agrupación se localice en $\Psi=0$ con un desfase progresivo tal que el máximo se encuentre dentro del margen visible.

Como sabemos la directividad en la dirección de máxima radiación se obtiene como el cociente entre la densidad de potencia por unidad de ángulo sólido, intensidad de radiación, y la potencia total radiada

$$D = \frac{K_{\max}}{P_r / 4\pi}$$

A su vez la potencia total radiada podemos expresarla como

$$P_r = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} K(\theta,\phi) sen\theta d\theta d\phi$$

Evaluemos esta integral. Para ello supongamos que la antena básica es isotrópica, por lo que la intensidad de radiación en cualquier dirección θ y ϕ es igual al factor de array, el cual sólo depende de la componente θ (radiación isotrópica), por lo que

$$K(\theta,\phi) = \left|F_A(\Psi)\right|^2$$

Sustituyendo en la expresión de la directividad se tiene

$$D = \frac{K_{\max}}{P_r / 4\pi} = 4\pi \frac{\left|F_{Amáx}\right|^2}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|F_A(\theta)\right|^2 sen\theta d\theta d\phi} = 4\pi \frac{\left|F_{Amáx}\right|^2}{2\pi\int_0^{\pi}\left|F_A(\theta)\right|^2 sen\theta d\theta} = \frac{2\left|F_{Amáx}\right|^2}{\int_0^{\pi}\left|F_A(\theta)\right|^2 sen\theta d\theta}$$

La potencia total radiada (denominador de la directividad) puede simplificarse si se expresa el factor de array en función del espaciado y de la fase progresiva, por lo que su valor es de

$$D = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 + \sum_{n=0}^{N-2}\sum_{q=n+1}^{N-1} 2a_n a_q \frac{sen\left[kd\left(n-q\right)\right]}{kd\left(n-q\right)}\cos\left(n-q\right)\alpha}$$

que corresponde a la expresión general de la directividad.
Esta expresión puede simplificarse para casos particulares como por ejemplo:

- Espaciado d=mλ/2

En esta situación especialmente importante ya que es muy usada se tiene que la directividad vale

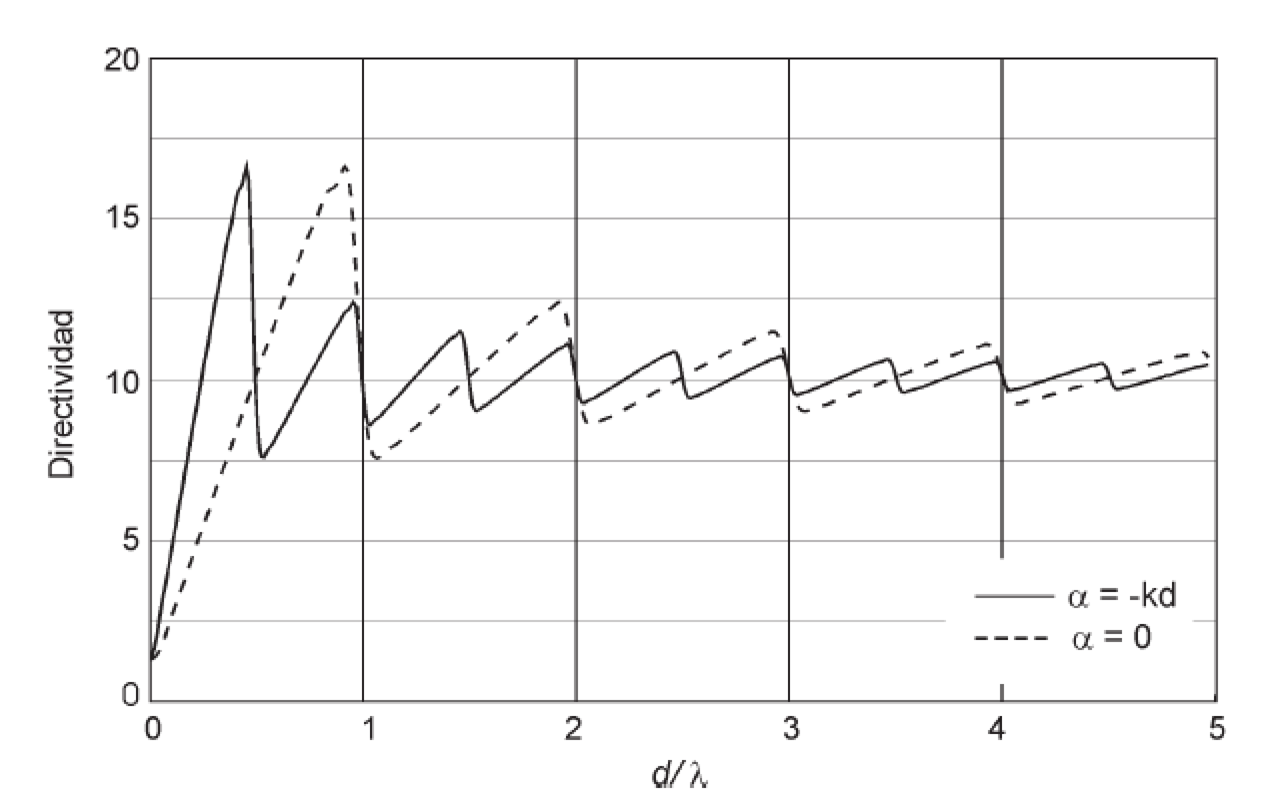
$$D = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2}$$

la cual depende sólo de la alimentación y del número de elementos de la agrupación y es independiente de la fase progresiva tal y como se puede ver en la gráfica siguiente

- Espaciado infinito

En este caso d >> y por tanto kd tiende a infinito. En este caso la directividad toma el valor de

$$D = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2}$$



- Espaciado << λ

En este caso d << y por tanto kd tiende a cero y en este caso para que el máximo se encuentre en el margen visible se tiene que cumplir $|\alpha| \le kd \to 0$. La directividad en este caso será:

$$D=\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1}a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1}a_n^2+\sum_{n=0}^{N-2}\sum_{q=n+1}^{N-1}2a_na_q}=\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1}a_n\right)^2}{\left(\sum_{n=0}^{N-1}a_n\right)^2}=1$$

Lo que implica un diagrama de radiación isotrópico.

○ Agrupación longitudinal

Para tener un máximo en la dirección del eje de la agrupación, el desfase progresivo debe de ser $\alpha=\pm kd$ por lo que

$$D=\frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1}a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1}a_n^2+\sum_{n=0}^{N-2}\sum_{q=n+1}^{N-1}a_na_q\frac{sen\left[2kd\left(n-q\right)\right]}{kd\left(n-q\right)}}$$

En la figura anterior se puede ver que al ser doble el valor del seno en el caso longitudinal, la frecuencia de oscilación será también doble por lo que cruzará el límite de kd tendiendo a infinito en un múltiplo entero de media longitud de onda

Agrupación transversal

En este caso el máximo de radiación se localiza en planos perpendiculares a la eje de la agrupación, por lo que la fase progresiva es igual a cero. En este caso la directividad es igual a

$$D = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 + \sum_{n=0}^{N-2}\sum_{q=n+1}^{N-1} 2a_n a_q \frac{sen\left[kd\left(n-q\right)\right]}{kd\left(n-q\right)}}$$

De la gráfica de la directividad se observa que la oscilación es la mitad del caso anterior y por tanto cruzará el límite de espaciado infinito en valores enteros de una longitud de onda

Agrupación uniforme

En este caso los coeficientes de alimentación son iguales a 1 y la directividad es igual a

$$D = \frac{N^2}{N + \sum_{m=1}^{N-1} 2(N-m) \frac{sen[mkd]}{mkd} \cos m\alpha}$$

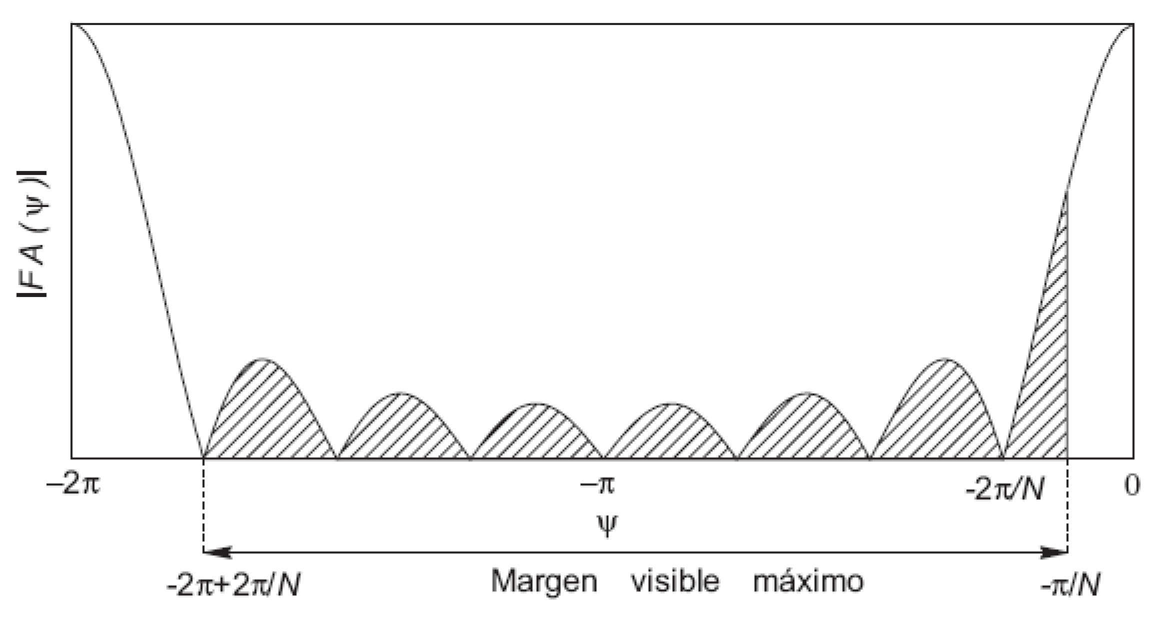
Y en el caso particular de que el producto kd=π, la directividad se hace igual al número de elementos de la distribución, esto es, D = N resultado que puede verse para el caso de N=10 en la gráfica de la directividad.

- Agrupación de Hansen-Woodyard

En todo lo anterior hemos visto que tanto el ancho de haz como la directividad dependen fuertemente de la fase progresiva en una agrupación uniforme. A pesar que un mayor ancho de haz, el carácter unidireccional de la agrupación longitudinal le proporciona una directividad aproximadamente el doble de la que se obtiene para la agrupación transversal. La directividad de la agrupación longitudinal puede mejorarse considerablemente si se escoge una fase progresiva tal que se reduzca el ancho de haz de la misma y por consiguiente no se reducirá mucho el campo máximo radiado. Esto se puede conseguir desplazando el límite derecho del margen visible hacia la izquierda hasta aproximadamente la mitad del lóbulo principal tal y como se observa en la grafica

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

Con esto se reduce el ancho del haz en Ψ y la potencia total radiada a la mitad con una disminución del máximo de radiación en el margen visible y por consiguiente la directividad aumenta hasta algo menos del doble de lo obtenido para la longitudinal.



Hansen y Woodyard calcularon el valor exacto de la fase progresiva que maximiza la directividad de la agrupación uniforme y obtuvieron un valor de

$$\alpha = -kd - \frac{2.94}{N} \approx -kd - \frac{\pi}{N}$$

lo que significa que hay que desplazar el margen derecho del margen visible una distancia Ψ = -π/N. Cu ando la fase progresiva toma este valor se dice que alcanza la condición de Hansen-Woodyard.

Esta condición es válida sólo cuando el diagrama de radiación es unidireccional (agrupación longitudinal), es decir cuando no aparecen lóbulos de difracción. Para que no aparezcan dichos lóbulos el espaciado ha de ser

$$d < \frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{3}{2N}\right)$$

En la práctica es común usar un espaciado de d=λ/4 y en este caso se tiene

$$\Delta\theta_c = 2arcsen\left(\sqrt{\frac{\lambda}{Nd}}\right) \simeq 2\sqrt{\frac{\lambda}{Nd}} \qquad \Delta\theta_{-3dB} = 2arcsen\left(\sqrt{0.28\frac{\lambda}{Nd}}\right) \approx \sqrt{1.11\frac{\lambda}{Nd}}$$

y la directividad

$$D = 7.2\frac{Nd}{\lambda}$$

En resumen, podemos enumerar las características de una agrupación de tipo Hansen-Woodyard comparada con la agrupación longitudinal, como sigue:

1) El haz principal es más estrecho
2) La directividad es algo inferior al doble, siempre y cuando que no aparezcan lóbulos de difracción
3) El campo radiado en la dirección del máximo es menor, pues los campos radiados por los elementos de la agrupación ya no interfieren en fase y esto es debido a que el desfase nulo en campo lejano (Ψ =0) se encuentra fuera del margen visible. Dentro del margen visible, el máximo de $F_A(\pi/N)=2N/\pi$ con lo que la disminución es de $20\log(\pi/2)=4$ dB.
4) El nivel del lóbulo principal al secundario empeora a 4dB ya que el lóbulo principal disminuye en 4 dB y el secundario se mantiene constante

La agrupación de Hansen-Woodyard usa distribuciones de alimentación uniformes y fase progresiva. Pueden conseguirse antenas superdirectivas mediante agrupaciones de Hansen-Woodyard si se usan distribuciones de no uniformes y fases no progresivas.

5.- Agrupaciones bidimensionales

De todas las agrupaciones bidimensionales sólo vamos a tratar las más sencilla, esto es, la agrupación plana, rectangular y equiespaciada.

En este caso el factor de array debe tener en cuenta todas las posibles interferencias que pueden producirse entre todos los elementos. Supongamos una distribución de MxN antenas distribuidas de forma rectangular en el plano XY. El factor de la agrupación es

$$F_A(\omega_x,\omega_y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} I_{mn}e^{jn\omega_x}e^{jm\omega_y}$$

donde ω_x y ω_y son las frecuencias digitales en dirección x e y respectivamente. La frecuencias digitales pueden escribirse en términos de las frecuencias espaciales y el periodo de muestreo

$$\omega_x = k_x d_x = kd_x sen(\theta)\cos(\phi)$$

$$\omega_y = k_y d_y = kd_y sen(\theta) sen(\phi)$$

Si suponemos una alimentación de fase progresiva $I_{mn}=a_{mn}e^{jn\alpha_x}e^{jm\alpha_y}$, se tiene:

$$F_A = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} e^{jn\alpha_x} e^{jm\alpha_y} e^{jnkd_x sen(\theta)\cos(\phi)} e^{jmkd_y sen(\theta) sen(\phi)} \Rightarrow$$

$$F_A = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} e^{jn\left(kd_x sen(\theta)\cos(\phi)+\alpha_x\right)} e^{jm\left(kd_y sen(\theta) sen(\phi)+\alpha_y\right)} \Rightarrow F_A(\Psi_x,\Psi_y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} e^{jn\Psi_x} e^{jm\Psi_y}$$

que corresponde a la transformada bidimensional de los coeficientes de alimentación. En el caso de usar alimentación separable, esto es, en el caso en el que los coeficientes de alimentación se puedan expresar como el producto de dos coeficientes que depende por separado del índice de fila y de columna respectivamente ($a_{mn} = a_m a_n$), se tiene

$$F_A(\Psi_x,\Psi_y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} e^{jn\Psi_x} e^{jm\Psi_y} = \sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{jm\Psi_y} \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\Psi_x} = F_A\left(\Psi_y\right) F_A\left(\Psi_x\right)$$

La dirección de máxima radiación, al igual que las agrupaciones lineales, estará asociado al máximo del factor de la agrupación y si además los coeficientes son reales y positivos, entonces,

$$\left|F_A(\Psi_x,\Psi_y)\right| \leq \left|F_A(0,0)\right|$$

y por tanto se cumple,

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_x = 0 = kd_x sen\left(\theta_{\max}\right)\cos\left(\phi_{\max}\right)+\alpha_x \\ \Psi_y = 0 = kd_y sen\left(\theta_{\max}\right)sen\left(\phi_{\max}\right)+\alpha_y\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\theta_{\max} = arcsen\sqrt{\left(\dfrac{\alpha_x}{kd_x}\right)^2+\left(\dfrac{\alpha_y}{kd_y}\right)^2} \\ \phi_{\max} = \arctan\left(\dfrac{d_x\alpha_y}{d_y\alpha_x}\right)\end{array}\right.$$

6.- Introducción a la síntesis de agrupaciones lineales de antenas

En los apartados anteriores, el estudio de las agrupaciones de antenas se ha realizado basándonos en la geometría y alimentación de las agrupaciones para obtener un diagrama de radiación determinado (problema directo o análisis del problema). Otro aspecto interesante es el problema inverso o síntesis de agrupaciones que consiste en especificar un diagrama de radiación con unas determinadas especificaciones y, a partir de él, obtener la separación entre antenas y la secuencia de alimentación. Para conseguir esto se debe determinar los fasores corriente para que las interferencias de los campos radiados se aproxime al diagrama de radiación deseado o cumpla ciertas condiciones sobre el diagrama (determinado ancho de haz, directividad, etc.)

Existen diferentes métodos de síntesis los cuales responden cada uno de ellos a un determinado problema por lo que usar uno u otro dependerá de las especificaciones del problema en particular.

La técnica seguida será la de aproximar el diagrama de radiación deseado por una representación funcional que corresponda al tipo de antena base elegida para la síntesis y que satisfaga las condiciones de error exigidas.

Las diferentes técnicas o métodos de síntesis pueden clasificarse en varias categorías:

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

- Método de Schelkunoff. Este método permite obtener el diagrama de radiación a partir de la especificación en el plano complejo de los nulos o ceros en el espacio real.
- Método del modelado del Haz (beam-shaping). En este método se especifica la forma del diagrama de radiación en el espacio real y se suele usar dos métodos de síntesis:
    - Síntesis de Fourier
    - Síntesis de Woodward
- Para diagramas de haz principales estrechos y bajos lóbulos secundarios suele especificarse el NLPS y el número de elementos en la agrupación. Para este tipo de diseño existen varios métodos de síntesis como:
    - Síntesis de Dolph-Chebyshev
    - Síntesis de Taylor
- Agrupaciones superdirectivas. Para obtener este tipo de agrupación existen diferentes métodos de síntesis los cuales permiten de forma teórica aumentar la directividad tanto como se desee aunque en muchos de estos casos son inviables por el diseño físico de la agrupación.
- Agrupaciones adaptativas. Estas se consiguen mediante desfasadores y amplificadores de señal controlados por ordenador. Esto permite sintetizar diagramas

en tiempo real capaces de adaptarse automáticamente al contorno del mismo colocando, por ejemplo, nulos en las direcciones en las que aparecen las interferencias.
De todos estos métodos sólo veremos algunos métodos como ejemplo de síntesis de antenas.

7.- Método de Schelkunoff.

Este método parte de las especificaciones del número de nulos y su posición en el margen visible o en el plano complejo. A partir de la posición de los ceros, se puede obtener el polinomio P(z) y por tanto los coeficientes de alimentación

$$P(z) = a_{N-1}\prod_{n=1}^{N-1}\left(z - z_n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$$

Dado que el número de cero nos proporciona el número de coeficientes de alimentación, éste a su vez nos indica el número de antenas en la agrupación. De la misma forma debe definirse el margen visible [α-kd, α+kd] a través del espaciado y de la fase progresiva y en la que hay que tener en cuenta que para espaciados superiores a media longitud de onda pueden aparecer lóbulos de difracción en el espacio real y por

Tanto dar un número de nulos mayor que el N-1.
De la especificación de los ceros, nos permite obtener de forma cualitativa la forma del diagrama de radiación ya que de la expresión del polinomio característico
Y por

$$P(z)=a_{N-1}\prod_{n=1}^{N-1}\left(z-z_n\right)$$

podemos obtener el producto de la distancia de un punto en concreto del circulo unidad a todos los ceros. Esto implica que entre dos ceros consecutivos o cerca de un cero múltiple, el factor de array no puede tomar valores muy elevados y por tanto el máximo se situará entre los ceros más alejados entre sí.
Si los ceros son complejos conjugados, el factor de array se hace real y puede simplificarse

$$(z-e^{j\psi_c})(z-e^{-j\psi_c})=z^2-z\left(e^{j\psi_c}+e^{-j\psi_c}\right)+1=z^2-2z\cos\psi_c+1$$

donde ψ_c es la posición angular del cero en el circulo de radio unidad o en el espacio eléctrico.
El polinomio característico para un número par de ceros (impar en antenas ya que se elimina la z=1) será

$$P(z)=\prod_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z^2-2z\cos\psi_c+1\right)$$

Cuando el número de ceros es impar, el cero desapareado debe estar en z=-1 o z=1 dado que en otro caso el factor de array no sería real y para este caso

$$P(z)=(z\pm1)\prod_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z^2-2z\cos\psi_c+1\right)$$

Otra apliación interesante del método de Schelkunoff es la de las agrupaciones binómicas ya que el factor de array puede interpretarse como el producto de los factores de radiación de N-1 agrupaciones, todas ellas de dos elementos y cada una de ellas aportando un cero.

$$F_A(\psi)=a_{n-1}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots(z-z_{N-1})$$

En este tipo de agrupaciones, cada dos elementos aporta un factor de array del tipo 1+z que se caracteriza porque si el espaciado es menor que la longitud de onda no presenta lóbulos secundarios. Para el caso particular de una agrupación formada por el producto de dos factores de radiación del tipo anterior, se tendrá

$$F_A(\psi) = (1+z)(1+z) = z^2 + 2z + 1$$

Esta ecuación representa el factor de array de una agrupación de tres elementos con amplitudes de corrientes en la proporción 1:2:1 obteniéndose de este modo un haz de radiación más estrecho pero con los mismo ceros y sin lóbulos secundarios.
Este proceso multiplicativo puede continuar para generar lo que se conoce como factores binomiales de agrupación

$$F_A(\psi) = (z+1)^N$$

En estas agrupaciones los coeficientes de alimentación son los correspondientes al desarrollo binomial esto es, por ejemplo para el término p-ésimo

$$a_p = \frac{N!}{p!\left(N-p\right)!}$$

8.- Síntesis de Fourier.

La síntesis de Fourier para el modelado del haz se basa en el concepto de factor de la agrupación como transformada de Fourier de la distribución de corrientes, esto es, los coeficientes de alimentación pueden obtenerse como la serie de Fourier del factor de la agrupación deseado.

Puede asegurarse que para un número finito de antenas, tomando los primeros coeficientes del desarrollo de Fourier, el factor de array obtenido se aproxima a las especificaciones dadas con un error cuadrático medio mínimo (se obtiene el número de antenas necesarias para obtener un error cuadrático medio dado por las especificaciones).

La metodología de esta síntesis es la siguiente:

1. Escoger el tipo de antena base y obtener el factor de la agrupación en el espacio real como el cociente entre el diagrama de radiación deseado y el de la antena base. Normalmente se suele especificar el módulo pero si se especifica la polarización se debe descomponer el problema en cada una de sus componente.
2. A partir del factor de array en el espacio real se obtiene el factor de array en el espacio eléctrico mediante la transformada $\psi = kd\cos\theta + \alpha$ lo cual implica

especificar el espaciado y la fase. La obtención de la serie de Fourier implica especificar el factor de array en todo el periodo de 0 a 2π en el espacio eléctrico. Usualmente el factor de array se da en el espacio real por lo que solamente proporciona valores en el margen visible y es necesario especificarlo en todo su periodo. Esto se hace imponiendo que el ancho espectral del factor de array de la agrupación resultante sea lo menor posible con el fin de lograr una rápida convergencia de la serie de Fourier y así implementar con el menor número de antenas para un cierto error cuadrático medio. Este proceso implica que no existe una solución única

3. Desarrollar el factor de array en el espacio eléctrico en series de Fourier y truncar la serie cuando el error cuadrático medio es menor que el umbral especificado o el número de antenas es menor que el especificado. Este desarrollo en serie se simplifica tomando como origen de la agrupación el centro de la misma y por tanto distinguir si ésta es par o impar:

$$N: impar \quad F_A(\psi) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_n e^{jn\psi} \quad \text{Por ejemplo N=5, } n = -2,-1,0,1,2$$

$$N: par \quad F_A(\psi) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_n e^{jn\psi} \quad \text{Por ejemplo N=4, } n = -\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}$$

Si el factor de array incluye especificaciones en módulo y fase del diagrama de radiación, entonces los coeficientes del desarrollo en serie tomarán valores complejos en general. Si suponemos que los coeficientes son de la forma $a_n = A_n e^{j\varphi_n} \in \mathbb{C}$ y éstos presentan simetría de complejos conjugados $a_{-n} = a_n^*$ (denominada alimentación simétrica), se cumple

$$a_n e^{jn\psi} + a_n^* e^{-jn\psi} = 2A_n \cos\left(n\psi + \varphi_n\right)$$

y el factor de array para una alimentación simétrica será

$$N: impar \quad F_A(\psi) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} A_n \cos\left(n\psi + \varphi_n\right)$$

$$N: par \quad F_A(\psi) = 2\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} A_n \cos\left(n\psi + \varphi_n\right)$$

donde A_n y φ_n son respectivamente la amplitud y fase de la corriente del elemento enésimo (la fase progresiva no está incluida en este término, ya que ésta lo está en la transformación del ángulo eléctrico).

Cuando el factor de array presenta simetría par o impar pueden realizarse desarrollos en series de cosenos o senos respectivamente y obtenerse las partes reales o imaginarias. En el caso de alimentación simétrica y F_A real con simetría par

$$F_A(\psi)=F_A(-\psi)\Rightarrow \varphi_n=0,\pi\Rightarrow a_n=\pm A_n$$

$$N:impar\quad F_A(\psi)=A_0\pm 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}A_n\cos\left(n\psi\right)=a_0+2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}a_n\cos\left(n\psi\right)$$

$$N:par\quad F_A(\psi)=\pm 2\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}A_n\cos\left(n\psi\right)=2\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}a_n\cos\left(n\psi\right)$$

Y para alimentación simétrica y F_A real con simetría impar

$$F_A(\psi)=-F_A(-\psi)\Rightarrow \varphi_n=\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow a_n=\pm jA_n$$

$$N:impar\quad F_A(\psi)=A_0+2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}A_n\cos\left(n\psi\pm\frac{\pi}{2}\right)=A_0\mp 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}A_n sen\left(n\psi\right)=A_0+2j\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}a_n sen\left(n\psi\right)$$

$$N:par\quad F_A(\psi)=2\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}A_n\cos\left(n\psi\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp 2\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}A_n sen\left(n\psi\right)=2j\sum_{n=\frac{1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}a_n sen\left(n\psi\right)$$

Los coeficientes de la serie de Fourier se calculan mediante la expresión

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_A(\psi)e^{-jn\psi}d\psi = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} F_A(\psi)\Big|_{par} \cos\left(n\psi\right)d\psi - \frac{j}{\pi}\int_{0}^{\pi} F_A(\psi)\Big|_{impar} sen\left(n\psi\right)d\psi$$

donde se ha descompuesto el factor de la agrupación en su parte par e impar

9.- Síntesis de Dolph-Chebyshev.

En algunas aplicaciones, como radar y comunicaciones punto a punto, es necesario establecer haces principales muy estrechos valores de NLPS mayores de un cierto valor. La síntesis de Chebyshev permite obtener un compromiso óptimo entre el ancho de haz del nivel del lóbulo principal al lóbulo secundario.

Para obtener esto se impone la condición de que todos los lóbulos secundarios sean iguales con objeto de que el ancho del haz del lóbulo principal sea lo más estrecho posible.

Para conseguir que todos los lóbulos secundario presente igual amplitud, se sintetiza el factor de array mediante polinomios de Chebyshev cuyas oscilaciones tienen amplitudes constantes las cuales pueden asociarse a los lóbulos secundarios.

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

Los polinomios de Chebyshev de grado n se definen como:

$$T_n(x)=\begin{cases}(-1)^n\cosh\left(n\cosh^{-1}|x|\right) & ; \quad x<-1\\ \cos\left(n\cos^{-1}x\right) & ; \quad |x|\leq 1\\ \cosh\left(n\cosh^{-1}x\right) & ; \quad x>1\end{cases}$$

Estos polinomios constituyen una familia ortogonal en el intervalo [-1,1], respecto al producto escalar usual

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)T_m(x)dx=\delta_{mn}$$

Y cumple la fórmula de recurrencia

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

Lo primeros valores de los polinomios viene dados por:

$$T_0(x)=1$$

$$T_1(x)=x$$

$$T_2(x)=2x^2-1$$

$$T_3(x)=4x^3-3x$$

$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$

Algunas de las propiedades más interesantes de estos polinomios son:

1. El polinomio $T_n(x)$ es de grado n
2. Para n par (impar) el polinomio sólo tiene potencias pares (impares) de la variable x
3. Los polinomios pasan por los puntos (1,1) y $\left(-1,(-1)^n\right)$ y fluctúan entre los valores extremos de ∓ 1 en el intervalo |x| < 1
4. Para n>1 los máximos están dados en el intervalo |x| <1 y tiene lugar cuando se cumple $x = \cos(\pi p/n)$ con p=1,2,3,…,n-1
5. Para n>0 todos los ceros están en el intervalo |x | < 1 y alcanzan los valores

$$x = \cos\left[\frac{\pi}{2n}(2p+1)\right] \text{ ; con p=0,1,2,...,n-1}$$

Esto equivale a decir que $T_n(x)$ corta al eje x n veces.

6. Para |x| >1 los polinomios crecen indefinidamente según x^n

El método de síntesis de Chebyshev se basa en transformar el intervalo [-1,1] de la variable x en la zona de lóbulos secundarios del margen visible. De esta forma se consigue el máximo número de lóbulos secundarios en el diagrama de radiación y todos ellos de igual amplitud y por tato el ancho del haz principal es mínimo.

Para conseguir esta transformación de la variable x a la variable de ángulo eléctrico hay diferentes posibilidades por lo que cada una de las transformaciones nos da un conjunto de fórmulas diferentes aunque el proceso de síntesis es el mismo. De todas las transformaciones posible, veremos la transformación de Dolph la cual asocia un intervalo de la variable x a un periodo del factor de la agrupación de la siguiente forma

$$x = x_0 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

La síntesis de Chebyshev presenta un óptimo compromiso entre el ancho del haz y el NLPS cuando todas las oscilaciones del polinomio entran dentro del margen visible. Dado que la transformación de Dolph distribuye todas las oscilaciones en un periodo 2π del factor de la agrupación, el diseño óptimo se consigue distribuyendo todo el margen visible en todo el periodo lo cual se consigue haciendo que el espaciado sea de media longitud de onda. Para valores inferiores del margen visible aumenta el ancho del haz en el espacio real y para valores mayores pueden aparecer lóbulos de difracción.
El parámetro x_0 está relacionado con la amplitud del haz principal ya que $F_A(0) = T_n(x_0)$ y por tanto con el nivel del NLPS ya que $NLPS = T_n(x_0) = \cosh\left(n \cosh^{-1}(x_0)\right)$

En el diseño es normal especificar el valor de NLPS por lo que el parámetro se puede calcular como

$$x_0 = \cosh\left(\frac{\cosh^{-1}(NLPS)}{n}\right)$$

Para el caso de un grupo de antenas impar, el factor de la agrupación y la distribución de corrientes se puede obtener a partir de la transformación de Dolph, esto es,

$$F_A(\psi) = T_n(x)\Big|_{x=x_0\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)} = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos n\psi$$

Los coeficientes de la alimentación se pueden calcular de diferentes formas. Una de ellas es identificando ambos miembros de la ecuación para lo cual es necesario expresar los términos de $\cos^n(\psi/2)$ en función de cos nψ mediante la fórmula de Moivre.

Otra forma es usar el polinomio característico (donde se ha usado la fórmula de Euler de cos (ψ/2))

$$P(z) = T_n(x)\Big|_{x=\frac{x_o}{2}\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)} = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_n z^n$$

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

Otra forma mucho más cómoda para obtener coeficientes de alimentación es usar el métodos de Schelkunoff teniendo en cuenta que los ceros se agrupan en parejas de complejos conjugados. Los ceros del polinomio de Chebyshev en la variable x se encuentran en

$$x_{c_m} = \cos\left(\frac{2m-1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{con m = 1,2,3,...,n}$$

Los ceros del factor de la agrupación se obtienen a partir de los valores anteriores mediante una transformación de Dolph

$$\psi_{c_m} = 2\cos^{-1}\left(\frac{x_{c_m}}{x_0}\right) \quad \text{con m = 1,2,3,...,n}$$

Lo cual permite obtener el polinomio según el método de Schelkunoff

$$P(z) = a_{N-1}\prod_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z^2 - 2z\cos\psi_{c_m} + 1\right) = \frac{x_0^{N-1}}{2}\prod_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(z^2 - 2z\cos\psi_{c_m} + 1\right)$$

Tema 5.- Agrupaciones de Antenas Lineales

donde el factor $a_{N-1} = x_0^{N-1} \big/ 2$ es igual al coeficiente del término de mayor grado del polinomio de Chebyshev tras realizar la transformación de Dolph.

El número de antenas es igual al número de términos del polinomio y, por tanto, igual al grado del polinomio de Chebyshev más 1 (N = n+1)