



Heinrich Rudolph Hertz  
(1857-1894)

# Antenas y Propagación

## Tema 4

### Antenas Lineales y Antenas de Lazo

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

## Índice:

1. Introducción
2. Antenas dipolos.
  - a) Dipolo eléctrico elemental
  - b) Dipolo magnético elemental
  - c) Dipolo corto
  - d) Dipolo de longitud arbitraria
  - e) Dipolo de media longitud de onda
3. Autoimpedancia e impedancia mutua. Teorema de Reciprocidad
4. Balunes
5. Dipolo doblado
6. Monopolos frente a planos conductores. Efecto de la tierra sobre el diagrama de radiación
7. Antena cargadas
8. Antenas de lazo
9. Otras antenas lineales
  - a) Antena Yagi-Uda
  - b) Antenas de Hélice



**Heinrich Rudolph Hertz**  
**(1857-1894)**

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

## 1.- Introducción

Las antenas de hilo, rectas o curvadas, son el tipo de antenas más antiguas y fáciles de estudiar y las que más versatilidad presentan para la mayoría de las aplicaciones. Entendemos por antena lineal aquellas que son construidas con hilos conductores eléctricamente delgados (diámetro mucho menor que  $\lambda$ ) por lo que fluye una corriente longitudinalmente por la superficie del hilo.

Las antenas de hilo se presentan en una inmensa variedad de formas y tamaños, por lo que sólo veremos las más usadas.

Se denomina dipolo a una antena de hilo conductor de sección circular y cortado en algún punto intermedio para permitir la conexión con el generador. Se dice que un dipolo es simétrico cuando los brazos del mismo son de igual longitud y asimétrico cuando son de longitudes diferentes.

La conexión del dipolo con el generador se suele hacer mediante líneas de transmisión bifilares y en este caso se dice que la alimentación es simétrica o balanceada, o mediante cables coaxiales, por lo que en este caso se denomina alimentación asimétrica o desbalanceada. En este último caso es necesario introducir dispositivos de

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

acoplamiento denominados balunes.

Para conocer el campo radiado por una antena es necesario conocer previamente la distribución de corriente en ella. A este problema se le conoce como problema externo, mientras que el conocimiento de la corriente inducida en la misma por efecto de un campo eléctrico incidente se le conoce como problema interno. Este último es el más difícil de tratar y aún para las antenas más elementales como son los dipolos no se tiene soluciones analíticas y la ecuación integral que describe el fenómeno (ecuación de Hallén) se tiene que resolver con métodos numéricos (p.e. el método de los momentos). En la práctica es frecuente suponer, como aproximación razonable, que la distribución de corriente a lo largo del dipolo es una distribución senoidal. Esta suposición está basada en que la sección transversal de la antena es muy pequeña respecto a la longitud de onda de la señal por lo que la densidad de corriente en ella sólo presentará componente acimutal y no circunferencial. Esta suposición conlleva las siguientes propiedades:

- a) En los extremos del dipolo la corriente es cero.
- b) Los máximos y nulos de corriente se alternan cada cuarto de longitud de onda.
- c) La corriente y la carga están desfasada  $90^\circ$  a lo largo del dipolo. La fase de la corriente y carga cambian  $180^\circ$  al pasar por cero (punto de alimentación).

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

- d) En el punto de alimentación puede haber un máximo, un nulo o un valor intermedio de corriente, según sea la relación entre la longitud de la antena y la longitud de onda de la señal.
- e) Si el dipolo es simétrico, la distribución de corriente a lo largo de los brazos de la antena también lo es y si los brazos son asimétricos, los máximos y nulos de corriente son diferentes en cada brazo.

## 2.- Antenas dipolo

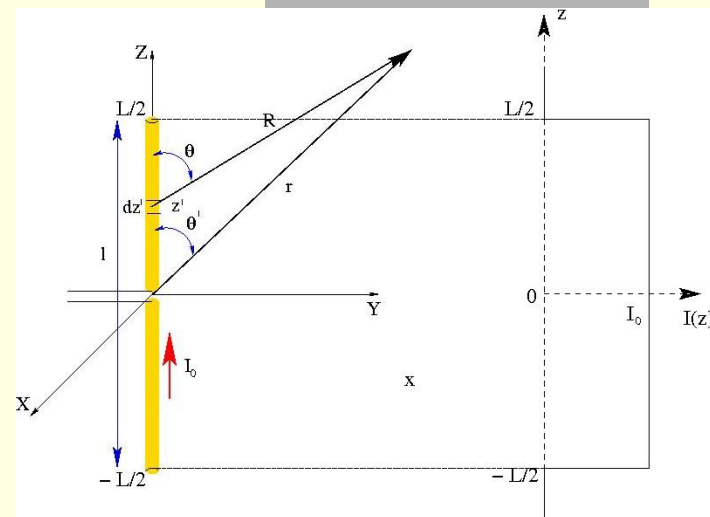
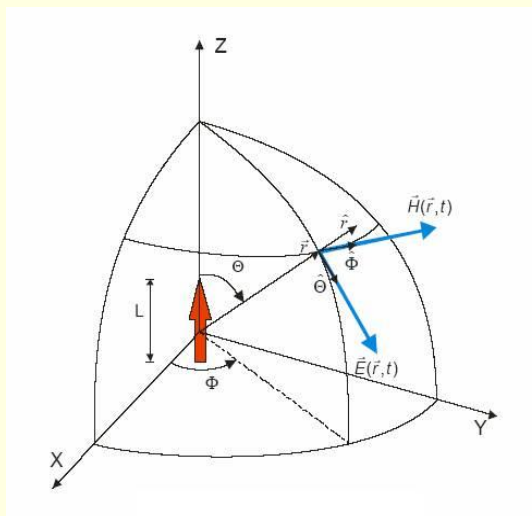
### a) Dipolo eléctrico elemental

Un dipolo eléctrico elemental, dipolo hertziano o elemento de corriente es un conductor cilíndrico y rectilíneo lo suficientemente pequeño como para considerar que la distribución de corriente sobre la superficie del mismo es uniforme a lo largo del mismo. Este tipo de antena es la más usada ya que, la mayoría de las antenas trabajando a frecuencias inferiores a 1 MHz. se comportan como dipolos elementales debido principalmente a que la longitud de onda, a esa frecuencia, es de 300 m.

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Supongamos una distribución de corriente uniforme sobre el dipolo cuya longitud es  $L \ll \lambda$

$$\vec{J}(\vec{r}') = \begin{cases} I_0 \delta(x') \delta(y') \hat{z}' & \forall |z'| < \frac{L}{2} \\ 0 & \forall |z'| > \frac{L}{2} \end{cases}$$



$$\vec{N} = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dV' = \iiint_{V'} I_0 \delta(x') \delta(y') \hat{z}' e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dx' dy' dz' = \int_{-L/2}^{L/2} I_0 e^{jk_z z'} dz' = I_0 L \frac{\sin\left(k_z \frac{L}{2}\right)}{k_z \frac{L}{2}} \hat{z} \approx I_0 L \hat{z} \Rightarrow \vec{N} = N_z \hat{z}$$

donde hemos supuesto que el punto fuente se encuentra en el origen y que la intensidad de corriente es constante respecto a las variables espaciales. En términos fasoriales, el potencial vector retardado es

$$\vec{A}(r) = \hat{k} \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} e^{-jkr}$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Como vemos, el potencial vector es paralelo a la dirección de la corriente y se puede escribir como el producto de una onda esférica por el vector de radiación del dipolo elemental

$$A_z = \frac{\mu_0 e^{-jkr}}{4\pi r} I_0 L = \frac{\mu_0 e^{-jkr}}{4\pi r} N_z \text{ donde } \vec{N} = I_0 L \hat{k} \Rightarrow \text{En general } \vec{N} = j\omega \vec{p}$$

Una vez obtenido el vector de radiación del dipolo hertziano, los campos radiados pueden obtenerse a partir del potencial vector (en coordenadas esféricas) esto es,

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \vec{N} \cdot \hat{r} = N_z \cos \theta \\ N_\theta &= \vec{N} \cdot \hat{\theta} = -N_z \sin \theta \\ N_\phi &= \vec{N} \cdot \hat{\phi} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 e^{-jkr}}{4\pi r} (N_r \hat{r} + N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi})$$

La intensidad del campo H puede obtenerse como  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}$  y el campo eléctrico en puntos fuera de la antena, como

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} (\nabla \times \vec{H})$$

Realizando las operaciones se tiene

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

$$E_r = I_0 L \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{2\eta}{r^2} + \frac{2}{j\omega\epsilon r^3} \right) \cos\theta, \quad E_\theta = I_0 L \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{jk\eta}{r} + \frac{\eta}{r^2} + \frac{1}{j\omega\epsilon r^3} \right) \sin\theta$$

$$H_\phi = I_0 L \frac{e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta$$

Los campos inducidos son:

$$E_r^i = \frac{I_0 L}{4\pi} \frac{2 \cos\theta}{j\omega\epsilon_0 r^3} e^{-jkr}, \quad E_\theta^i = \frac{I_0 L}{4\pi} \frac{\sin\theta}{j\omega\epsilon_0 r^3} e^{-jkr}$$

mientras que los campos de radiación son:

$$E_\theta = j\omega\mu_0 \frac{I_0 L}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta, \quad H_\phi = jk \frac{I_0 L}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta$$

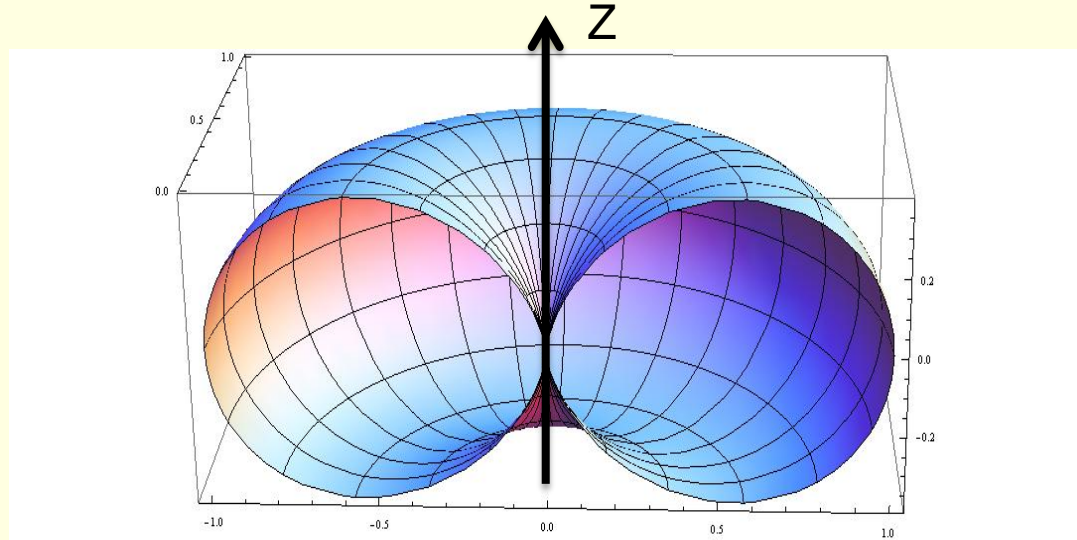
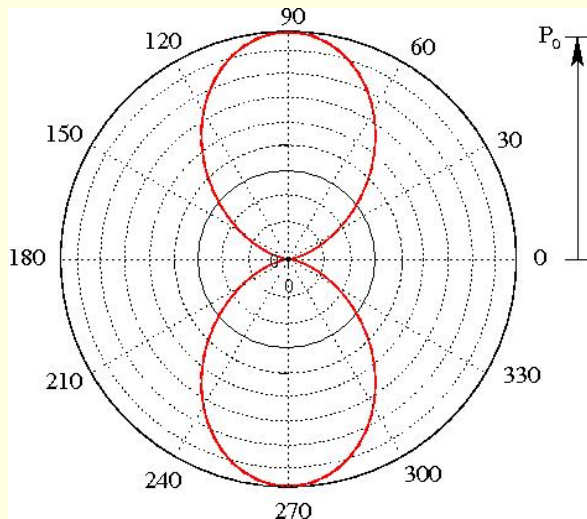
Los términos de campo que son inversamente proporcional a  $r^2$  dominan en la región de transición entre los campos inducidos y los campos radiados.

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

La densidad de potencia radiada (expresada en valores eficaces) se calcula a partir de las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos radiados

$$\vec{\mathcal{P}} = \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \hat{r} \left( \frac{I_0 L}{4\pi r} \right)^2 \omega \mu_0 k \sin^2 \theta \Rightarrow |\vec{\mathcal{P}}| = P_0 \sin^2 \theta \Rightarrow t_n(\theta, \phi) = \frac{|\mathcal{P}|}{|\mathcal{P}_{\max}|} = \sin^2 \theta$$

Como puede verse el diagrama de potencia radiada es omnidireccional en el plano XY y presenta un nulo en la dirección del eje Z (dirección del flujo de corriente).



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

La potencia total radiada por el dipolo puede obtenerse mediante integración de la densidad de potencia radiada sobre una superficie que encierre al dipolo elemental, esto es,

$$P_r = \iint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left( \hat{r} \left( \frac{I_0 L}{4\pi r} \right)^2 \omega \mu_0 k \sin^2 \theta \right) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}) = \left( \frac{I_0 L}{4\pi r} \right)^2 \omega \mu_0 k r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{(I_0 L)^2}{6\pi} \omega \mu_0 k$$

### b) Dipolo magnético elemental

Denominamos dipolo magnético elemental o espira elemental a un conductor en forma de anillo por el que circula una corriente uniforme. Las dimensiones de la espira son mucho menor que la longitud de onda.

Siguiendo los mismos pasos que para el dipolo eléctrico, el vector de radiación vendrá dado por

$$\vec{N} = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv' = \int_0^{2\pi} I \hat{\phi} e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} a d\phi = jk\pi a^2 I_0 \sin \theta \hat{\phi}$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

y los campos de radiados por

$$H_r = -\frac{j\omega\mu_0 k^2 m}{2\pi\eta} \left( \frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \cos\theta e^{-jkr}$$

$$H_\theta = -\frac{j\omega\mu_0 k^2 m}{4\pi\eta} \left( \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} + \frac{1}{(jkr)^3} \right) \sin\theta e^{-jkr}$$

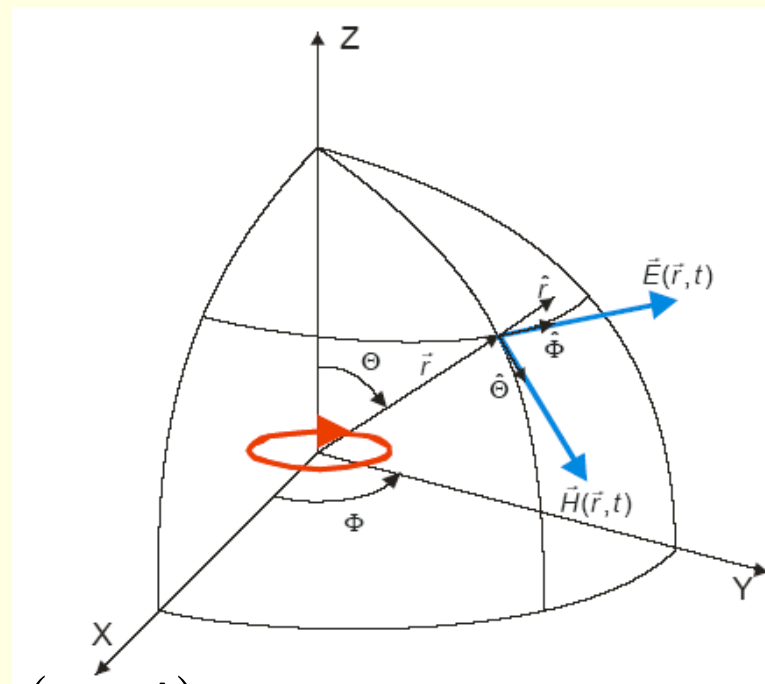
$$E_\phi = \frac{j\omega\mu_0 k^2 m}{4\pi} \left( \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) \sin\theta e^{-jkr}$$

donde  $m$  es el momento magnético dado por

$$\vec{m} = I\pi a^2 \hat{k} \quad \text{En general se tiene que } \vec{N} = jk(\vec{m} \times \hat{r})$$

La intensidad de los campos eléctrico y magnético cercano puede calcularse haciendo que  $kr \ll 1$  por lo que

$$H_r = \frac{m}{4\pi r^3} 2\cos\theta, \quad H_\theta = \frac{m}{4\pi r^3} \sin\theta, \quad E_\phi = -\frac{j\omega\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\theta$$



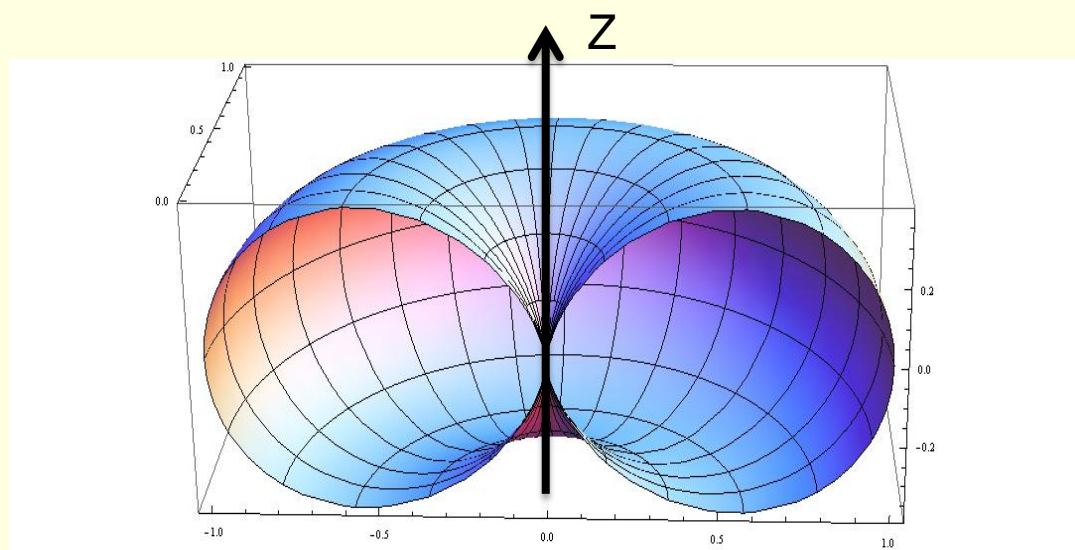
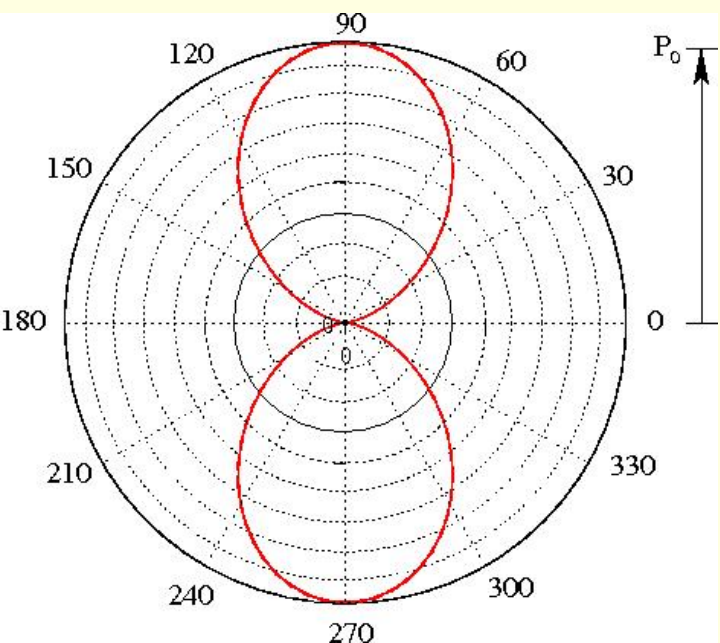
## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Con respecto al campo lejano, despreciaremos los términos de orden superior a  $1/kr$  por lo que

$$H_{\theta} = -\frac{\omega\mu_0 km}{4\pi\eta r} \sin\theta e^{-jkr}, \quad E_{\phi} = \frac{\omega\mu_0 km}{4\pi r} \sin\theta e^{-jkr}$$

La densidad de potencia radiada (en valores rms) se calcula a partir de las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos lejanos

$$\vec{\phi} = \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \hat{r} \left( \frac{\omega\mu_0 km}{4\pi r \sqrt{\eta}} \right)^2 \sin^2\theta = P_0 \sin^2\theta$$



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Como puede verse el diagrama de potencia radiada es omnidireccional en el plano XY y presenta un nulo en la dirección del eje Z. Este diagrama es el mismo que para el dipolo eléctrico debido a la dualidad existente entre el dipolo eléctrico y el dipolo magnético.

### Parámetros de antenas asociados a los dipolos eléctricos y magnéticos

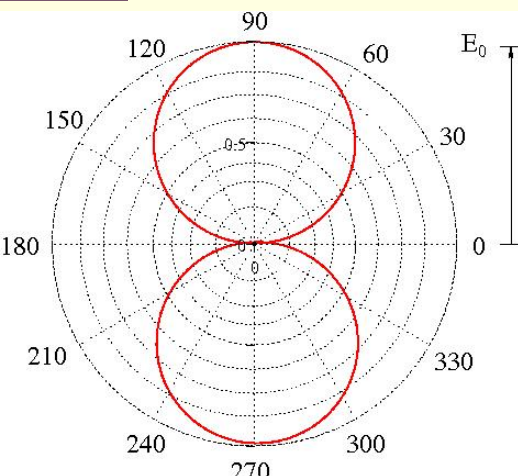
A partir de las expresiones obtenidas en apartados anteriores sobre los campos producidos por dipolos elementales (eléctricos y magnéticos) se analizará los parámetros de radiación asociados a estos elementos de corriente de longitud  $L$  ( $L \ll \lambda$ ).

Para el dipolo eléctrico, los campos de radiación vienen dados por:

$$\vec{E}_{rad} = j\omega\mu_0 \frac{I_0 L}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta \hat{\theta} = E_0 \sin\theta \hat{\theta}, \quad \vec{H}_{rad} = jk \frac{I_0 L}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin\theta \hat{\phi}, \quad \vec{N} = j\omega\vec{p}$$

El diagrama de radiación de campo sería muy similar al diagrama de radiación en potencia (transparencia 10) pero en vez de ser función de  $\sin^2\theta$  es función de  $\sin\theta$ , esto es,

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo



A partir de la densidad de potencia calculada anteriormente

$$\vec{\phi} = \text{Re} \left[ \vec{E} \times \vec{H}^* \right] = \hat{r} \left( \frac{I_0 L}{4\pi r} \right)^2 \omega \mu_0 k \sin^2 \theta$$

podemos calcular la potencia total radiada

$$P_r = \iint_S \vec{\phi} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{I_0 L}{4\pi r} \right)^2 \omega \mu_0 k \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{2}{3} \left( \frac{I_0 L}{\lambda} \right)^2 \pi \eta$$

Conocida la potencia total radiada, la resistencia de radiación viene dada por

$$R_r = \frac{P_r}{I_0^2} = \frac{\frac{2}{3} \left( \frac{I_0 L}{\lambda} \right)^2 \pi \eta}{I_0^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \pi 120\pi = 80\pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \quad [\Omega]$$

La directividad vendrá dada por la expresión

$$D = \frac{\phi_{\text{máx}}}{P_r / (4\pi r^2)} = \frac{\phi_{\text{máx}}}{\frac{\iint \phi(\theta, \phi) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}{4\pi r^2}} = \frac{4\pi}{\frac{\iint \phi(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi}{\phi_{\text{máx}}}} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta d\phi} = \frac{3}{2} = 1.5$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

y la ganancia directiva  $D(\theta, \phi) = D \cdot t(\theta, \phi) = 1.5 \text{sen}^2 \theta$

La longitud efectiva del dipolo hertziano viene dada por

$$\begin{aligned}\vec{l}_{ef} &= \frac{1}{I_0} \left( \vec{N} - (\vec{N} \cdot \hat{r}) \hat{r} \right) = \frac{1}{I_0} \left( I_0 L \hat{z} - (I_0 L \hat{z} \cdot \hat{r}) \hat{r} \right) = L \left( \cos \theta \hat{r} - \text{sen} \theta \hat{\theta} - \left( (\cos \theta \hat{r} - \text{sen} \theta \hat{\theta}) \cdot \hat{r} \right) \hat{r} \right) = \\ &= L \left( \cos \theta \hat{r} - \text{sen} \theta \hat{\theta} - \cos \theta \hat{r} \right) = -L \text{sen} \theta \hat{\theta} \Rightarrow \vec{l}_{ef_{\max}} = -L \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \hat{\theta} = -L \hat{\theta} = L \hat{z}\end{aligned}$$

El área efectiva vendrá dada por

$$A_{ef} = \frac{l_{ef}^2 \eta}{4 R_a} = \frac{120 \pi (L \text{sen} \theta)^2}{4 \left( 80 \pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \right)} = \frac{3}{8} \frac{\lambda^2}{\pi} \text{sen}^2 \theta \Rightarrow A_{ef_{\max}} = D \frac{\lambda^2}{4 \pi} = \frac{3}{2} \frac{\lambda^2}{4 \pi} = \frac{3}{8} \frac{\lambda^2}{\pi}$$

donde se ha supuesto que no existen pérdidas y por tanto la resistencia de la antena coincide con la resistencia de radiación de la misma.

La intensidad de radiación viene dada por

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

$$K(\theta, \phi) = \rho(\theta, \phi) r^2 = \left( \frac{I_0 L}{4\pi} \right)^2 \omega \mu_0 k \sin^2 \theta = \left( \frac{I_0 L}{4\pi} \right)^2 \eta k^2 \sin^2 \theta = \left( \frac{I_0 L}{4\pi} \right)^2 \eta \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta =$$

$$= \frac{I_0^2 \eta}{4} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta$$

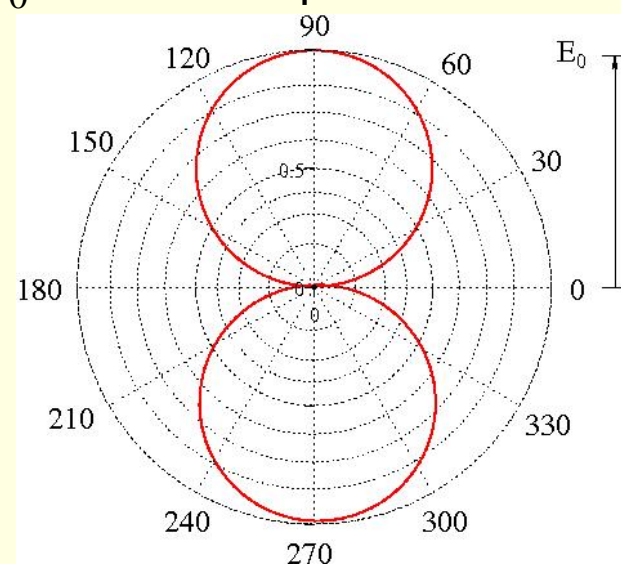
Veamos los parámetros asociados a una espira elemental. El vector de radiación de la espira elemental de radio  $a$  y recorrida por una intensidad  $I_0$  viene dada por

$$\vec{N} = jk\vec{m} \times \hat{r} \quad ; \quad \vec{m} = \iint_{S'} IdS' \hat{n}' \Rightarrow \vec{N} = jk\pi a^2 I_0 \sin\theta \hat{\phi}$$

Los campos de radiación para la espira vienen dados por

$$H_\theta = -\frac{\omega \mu_0 k m}{4\pi \eta r} \sin\theta e^{-jkr} \quad , \quad E_\phi = \frac{\omega \mu_0 k m}{4\pi r} \sin\theta e^{-jkr}$$

por lo que el diagrama de radiación para  $E$  es similar al del eléctrico pero con la polarización ortogonal, esto es, colocado la espira en un plano ecuatorial, el campo eléctrico está orientado en la dirección de los paralelos.



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

La densidad de potencia se calculó anteriormente obteniéndose la expresión

$$\vec{\phi} = \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \hat{r} \left( \frac{\omega \mu_0 k m}{4\pi r \sqrt{\eta}} \right)^2 \sin^2 \theta = P_0 \sin^2 \theta$$

por lo que el diagrama de radiación en potencia es similar al de campo pero con la misma salvedad que en el dipolo eléctrico.

Con respecto a la potencia total radiada, ésta vendrá dada por

$$P_r = \iint_S \vec{\phi} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\omega \mu_0 k m}{4\pi r \sqrt{\eta}} \right)^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{(\omega \mu_0 k m)^2}{8\pi \eta} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{(\omega \mu_0 k m)^2}{6\pi \eta}$$

y por tanto la resistencia de radiación es

$$R_r = \frac{P_r}{I_0^2} = \frac{\frac{(\omega \mu_0 k m)^2}{6\pi \eta}}{I_0^2} = \frac{(\omega \mu_0 k \pi a^2)^2}{6\pi \eta} = \frac{(\eta k^2 \pi a^2)^2}{6\pi \eta} = \frac{\eta k^4 \pi a^4}{6} = 20 k^4 \pi^2 a^4 = 320 \pi^6 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4 \quad [\Omega]$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Como puede verse, una espira circular elemental es un radiador muy poco eficiente comparado con el dipolo eléctrico ya la resistencia de radiación del dipolo magnético es proporcional a la cuarta potencia de sus dimensiones. Esta gran diferencia entre el dipolo eléctrico y el magnético viene asociada a que este último posee un camino cerrado y por tanto para cada elemento de corriente existe otro igual y de signo contrario. En este dispositivo la radiación se debe a las diferencias de fase de las ondas producidas por los elementos de corriente en sentidos opuestos.

La directividad del dipolo magnético es igual a la del eléctrico (ya que presentan igual diagrama de radiación)

$$D = \frac{\mathcal{P}_{\text{máx}}}{P_r / (4\pi r^2)} = \frac{\mathcal{P}_{\text{max}}}{\frac{\iint \mathcal{P}(\theta, \phi) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}{4\pi r^2}} = \frac{4\pi}{\iint \frac{\mathcal{P}(\theta, \phi)}{\mathcal{P}_{\text{max}}} \sin(\theta) d\theta d\phi} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta d\phi} = \frac{3}{2} = 1.5$$

y la ganancia directiva  $D(\theta, \phi) = D \cdot t(\theta, \phi) = 1.5 \sin^2 \theta$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Como la directividad es la misma que la del dipolo eléctrico, también será igual el área efectiva máxima, esto es,

$$A_{ef\text{máx}} = \frac{3}{8} \frac{\lambda^2}{\pi}$$

Con respecto a la longitud efectiva

$$\vec{l}_{ef} = \frac{1}{I_0} \left( jk\pi a^2 I_0 \text{sen}\theta \hat{\phi} - \left( jk\pi a^2 I_0 \text{sen}\theta \hat{\phi} \cdot \hat{r} \right) \hat{r} \right) = \frac{jk\pi a^2 I_0 \text{sen}\theta}{I_0} \hat{\phi} = jk\pi a^2 \text{sen}\theta \hat{\phi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{l}_{ef\text{máx}} = jk\pi a^2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \hat{\phi} = jk\pi a^2 \hat{\phi}$$

La intensidad de radiación viene dada por

$$K(\theta, \phi) = \wp(\theta, \phi) r^2 = \left( \frac{\omega \mu_0 k m}{4\pi \sqrt{\eta}} \right)^2 \text{sen}^2 \theta = \frac{\omega^2 \mu_0^2 m^2}{4\lambda^2 \eta} \text{sen}^2 \theta$$

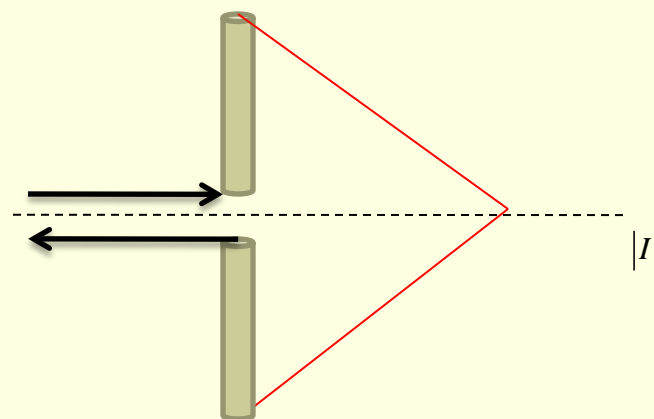
## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

### c) Dipolo corto

El dipolo elemental, aquel en el que hemos supuesto que no existe variación de la corriente con la componente espacial del hilo (componente de  $z'$ ), es válido para dipolos de longitud  $L < \lambda/50$  donde  $L$  es la longitud total del dipolo y  $\lambda$  la longitud de onda de la señal.

Una mejor aproximación de la distribución de corrientes para antenas cuya longitud está comprendida entre  $\lambda/50 < L < \lambda/10$  es la distribución de corriente triangular, definida por

$$I(x', y', z') = \begin{cases} I_0 \left(1 - \frac{2}{L} z'\right) \hat{k} & 0 \leq z' \leq \frac{L}{2} \\ I_0 \left(1 + \frac{2}{L} z'\right) \hat{k} & -\frac{L}{2} \leq z' \leq 0 \end{cases}$$



donde  $I_0$  es una constante.

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Siguiendo un procedimiento similar al usado para el dipolo elemental, el potencial vector viene dado por:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_{-\frac{L}{2}}^0 I_0 \left( 1 + \frac{2}{L} z' \right) \frac{e^{-j\vec{k} \cdot \vec{R}}}{R} \hat{k} dz' + \int_0^{\frac{L}{2}} I_0 \left( 1 - \frac{2}{L} z' \right) \frac{e^{-j\vec{k} \cdot \vec{R}}}{R} \hat{k} dz' \right]$$

Debido a que la longitud del dipolo es muy pequeña ( $< \lambda/10$ ) los valores de  $R$  en los módulos no son muy diferentes a los valores de  $r$  por lo que  $R \sim r$ . Respecto al máximo error de fase para una antena de longitud  $L = \lambda/10$ , ésta no difiere en mas de  $18^\circ$ , por lo que podemos suponer en fases que  $R \sim r$ . Para valores menores de esta longitud la fase decrece.

Haciendo la integración, con estas suposiciones, se tiene que el potencial vector es

$$\vec{A}(R) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} e^{-jkr} \hat{k}$$

que corresponde con la mitad del obtenido en el dipolo elemental.

A partir del potencial vector se pueden evaluar los campos de radiación ( $kR \gg 1$ ), y estos vienen dados por

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

$$\left. \begin{aligned} E_{\theta} &\cong j\eta \frac{kI_0 L e^{-jkr}}{8\pi r} \sin\theta \\ H_{\phi} &\cong j \frac{kI_0 L e^{-jkr}}{8\pi r} \sin\theta \\ E_r = E_{\phi} = H_r = H_{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} kR \gg 1$$

La densidad de flujo de potencia radiada por el dipolo corto resulta ser

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{\eta k^2 I_0^2 L^2 \sin^2 \theta}{128 \pi^2 r^2}$$

que corresponde a una cuarta parte del valor de la densidad de potencia media radiada por el dipolo elemental.

La potencia total radiada viene dada por

$$P_r = \iint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left( \hat{r} \frac{\eta k^2 I_0^2 L^2 \sin^2 \theta}{128 \pi^2 r^2} \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}) = \hat{r} \frac{\eta k^2 I_0^2 L^2}{128 \pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 10 \pi^2 I_0^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

La resistencia de radiación viene dada por

$$R_r = \frac{2P_r}{I_0^2} = 20\pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \quad [\Omega]$$

Que corresponde a un cuarto de la resistencia de radiación del dipolo elemental. Con respecto a los diagramas de radiación, ya que tanto el campo como la potencia tienen la misma dependencia en ángulos que la del dipolo elemental, los diagramas de radiación serán iguales y como consecuencia el área efectiva, también será la misma, no así la longitud efectiva ya que ésta depende de la resistencia de radiación. La longitud efectiva máxima viene dada por

$$l_{ef} = \frac{L}{2}$$

Por último, la directividad del dipolo corto ha de ser la misma que la del dipolo elemental ya que ambos presenta el mismo diagrama de radiación.  $D = 1.5$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

### d) Dipolo de longitud arbitraria

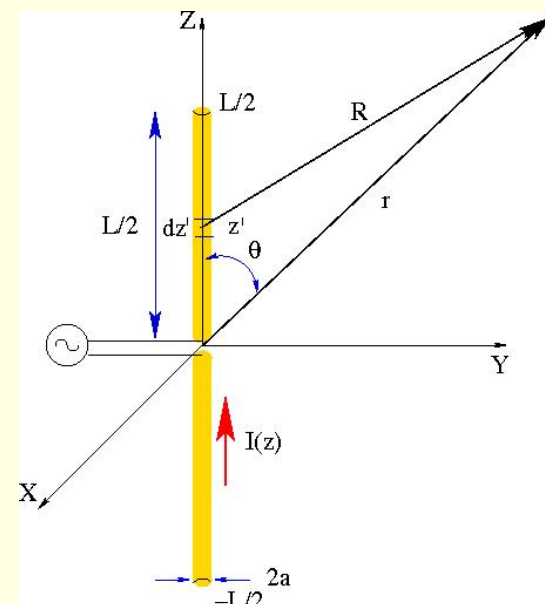
Si ahora suponemos que la longitud de la antena es del orden de la longitud de onda de la señal existirán interacciones entre los diferentes elementos así como retardos importantes por lo que la aproximación de intensidad uniforme ya no es válida.

Para este tipo de antena, una buena aproximación para la distribución de corriente es la senoidal, esto es,

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z} I(z') \delta(x') \delta(y')$$

con

$$I(z') = I_0 \sin \left[ k \left( \frac{L}{2} - |z'| \right) \right] = \begin{cases} I_0 \sin \left[ k \left( \frac{L}{2} - z' \right) \right] & \forall \quad 0 \leq z' \leq \frac{L}{2} \\ I_0 \sin \left[ k \left( \frac{L}{2} + z' \right) \right] & \forall \quad -\frac{L}{2} \leq z' \leq 0 \end{cases}$$



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

con  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

El valor de la corriente en la alimentación vendrá dado por  $I(0) = I_0 \operatorname{sen}\left(k \frac{L}{2}\right)$

A partir de la distribución de corriente podemos calcular el vector de radiación como

$$\vec{N} = \int_{-L/2}^{L/2} I(z') \hat{z} e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dz' = 2kI_0 \frac{\cos\left(k_z \frac{L}{2}\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{k^2 - k_z^2} \hat{z} = 2I_0 \frac{\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{k \operatorname{sen}^2 \theta} \hat{z}$$

donde se hace uso de  $k_z = k \cos \theta$

El vector de radiación en coordenadas esféricas puede evaluarse teniendo en cuenta que  $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \operatorname{sen} \theta \hat{\theta}$

$$\vec{N} = \frac{2I_0}{k} \frac{\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cos \theta \hat{r} - \frac{2I_0}{k} \frac{\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{\operatorname{sen} \theta} \hat{\theta}$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

A partir del vector de radiación, los campos de radiación vienen dados por

$$E_{\theta} = j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_0 \frac{\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{\sin \theta}$$
$$H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{\eta} = j \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_0 \frac{\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{\sin \theta}$$

La densidad de potencia radiada es

$$\vec{\wp} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{\eta}{8\pi^2 r^2} I_0^2 \frac{\left[\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)\right]^2}{\sin^2 \theta} \hat{r}$$

La intensidad de radiación viene dada por

$$K(\theta, \phi) = \wp(\theta, \phi) r^2 = \frac{\eta}{8\pi^2} I_0^2 \frac{\left[\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)\right]^2}{\sin^2 \theta}$$

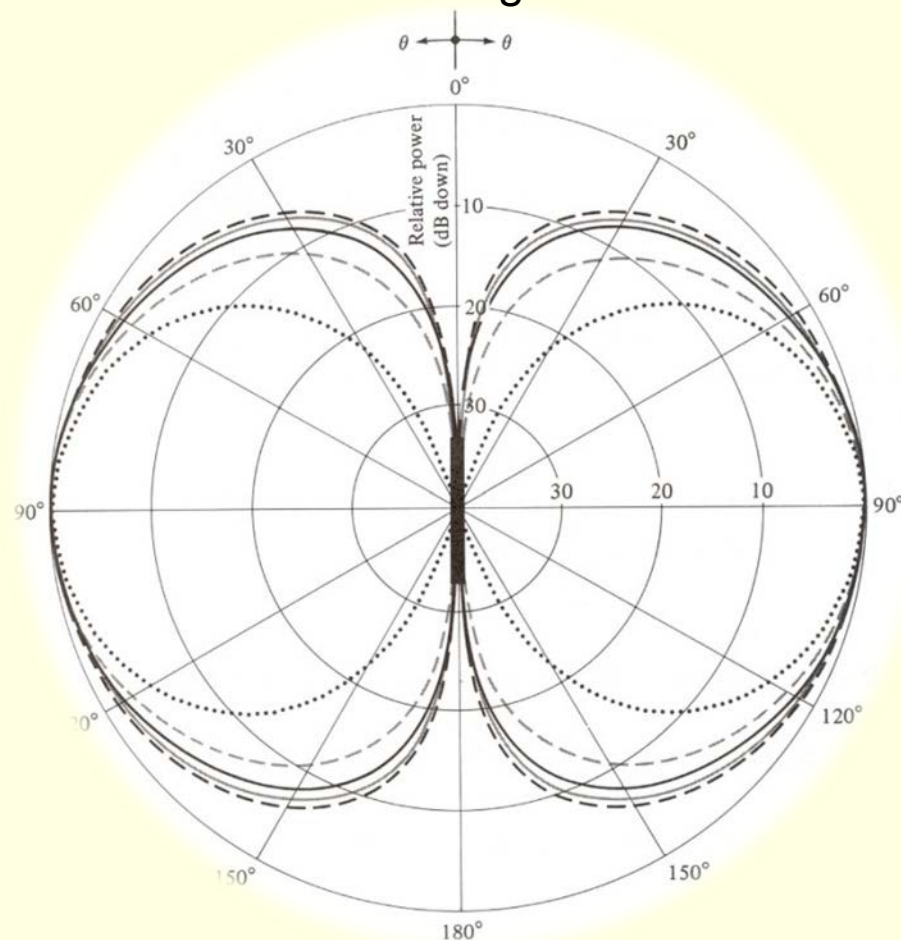
## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

A partir de la intensidad de radiación podemos calcular el diagrama de radiación normalizado

$$t(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_{\max}} = \left[ \frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{\sin \theta} \right]^2$$

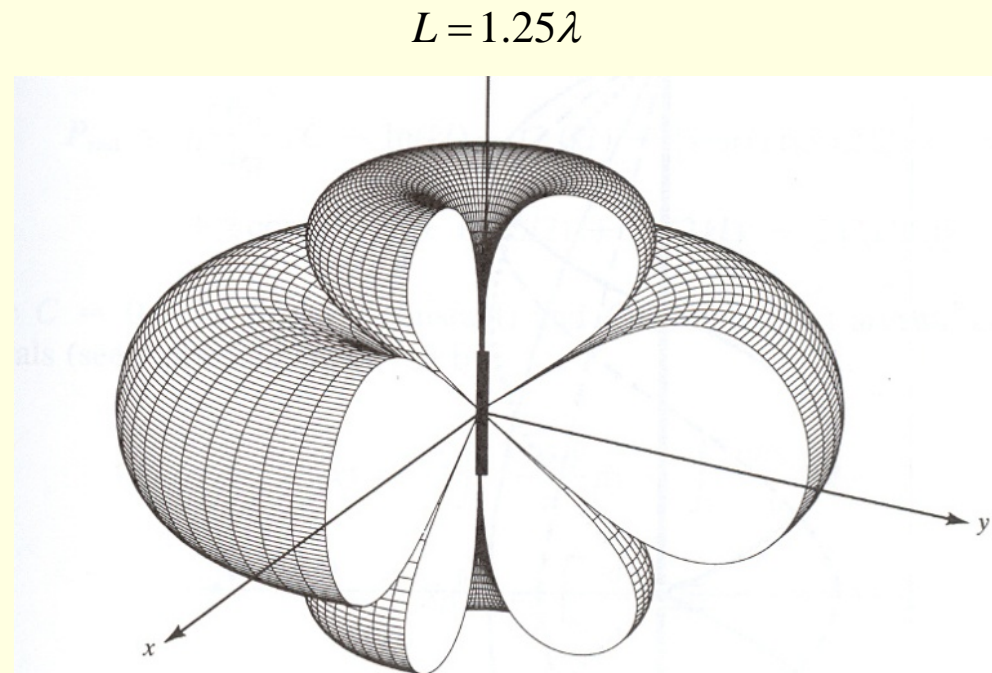
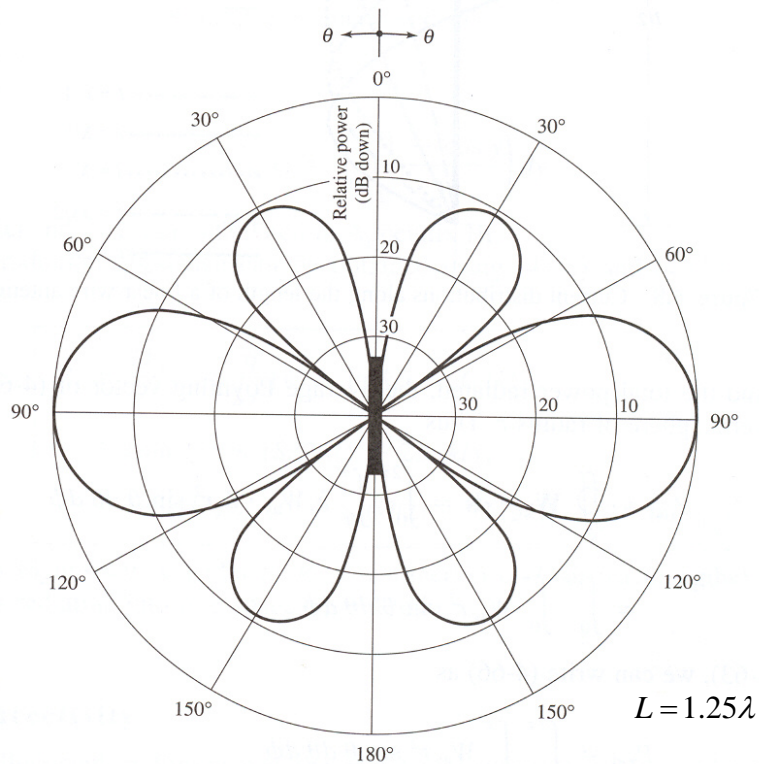
En la grafica se representa el diagrama bidimensional para diferentes valores de  $L$ , en longitudes de onda, comprendidos entre el dipolo elemental ( $L \ll \lambda$ ) y  $L = \lambda$ .

$$\begin{array}{ll} L \ll \lambda & \text{-----} \\ L = \lambda/4 & \text{————} \\ L = \lambda/2 & \text{————} \\ L = 3\lambda/4 & \text{-----} \\ L = \lambda & \text{.....} \end{array}$$



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Para antenas dipolo de longitud mayor a la longitud de onda de la señal, los diagramas de radiación empiezan a presentar lóbulos secundarios como por ejemplo el mostrado en la siguiente figura.



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

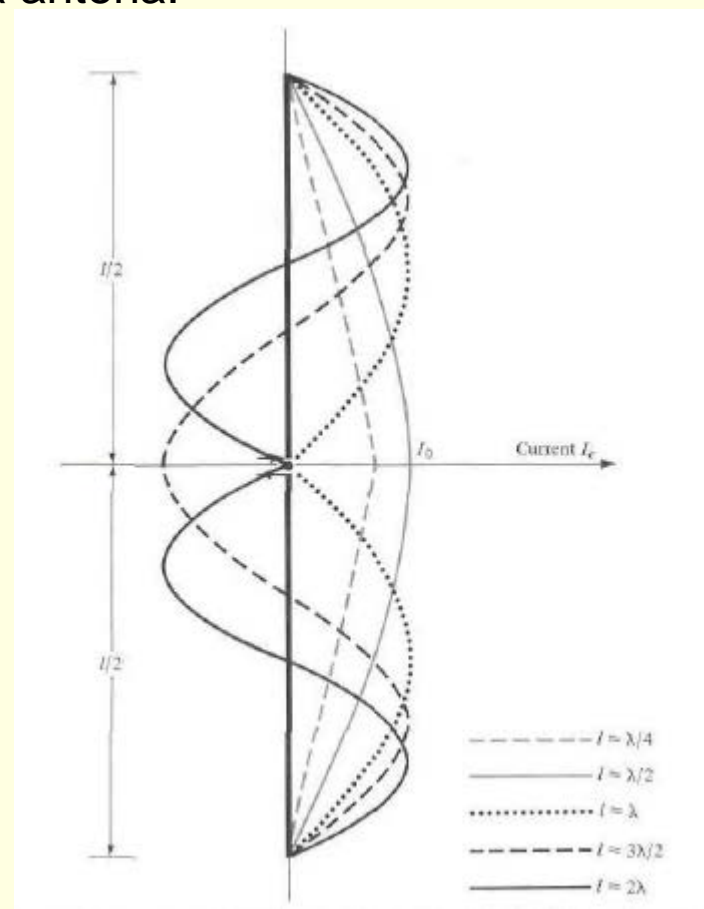
La distribución de corriente sobre la antena para cada uno de los casos anteriores viene dado en la siguiente gráfica. para estos casos sobre la antena.

Para calcular la resistencia de radiación antes hemos de evaluar la potencia total radiada ya que ésta viene relacionada con la potencia por la expresión

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_0^2}$$

$$P_{rad} = \frac{\eta}{4\pi} I_0^2 \int_0^\pi \frac{\left[ \cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right) \right]^2}{\sin \theta} d\theta$$

Esta integral puede evaluarse de forma analítica o mediante métodos numéricos. El valor de dicha integral es el siguiente:



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

$$\int_0^\pi \frac{\left[ \cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right) \right]^2}{\sin \theta} d\theta = C + \ln(kL) - C_i(kL) + \frac{1}{2} \sin(kL) \left[ S_i(2kL) - 2S_i(kL) \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \cos(kL) \left[ C + \ln\left(\frac{kL}{2}\right) + C_i(2kL) - 2C_i(kL) \right]$$

donde C es la constante de Euler de valor  $C=0.5772$  y  $C_i(x)$  y  $S_i(x)$  son los cosenos y senos integrales definidos por

$$S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du \quad y \quad C_i(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(u)}{u} du$$

El cálculo del coseno integral es complicado computacionalmente, por lo que en vez del coseno integral se suele usar la función

$$C_{in}(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos(u)}{u} du$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

y la relación

$$C_i(x) = -C_{in}(x) + Ln(x) + C$$

con C la constante de Euler.

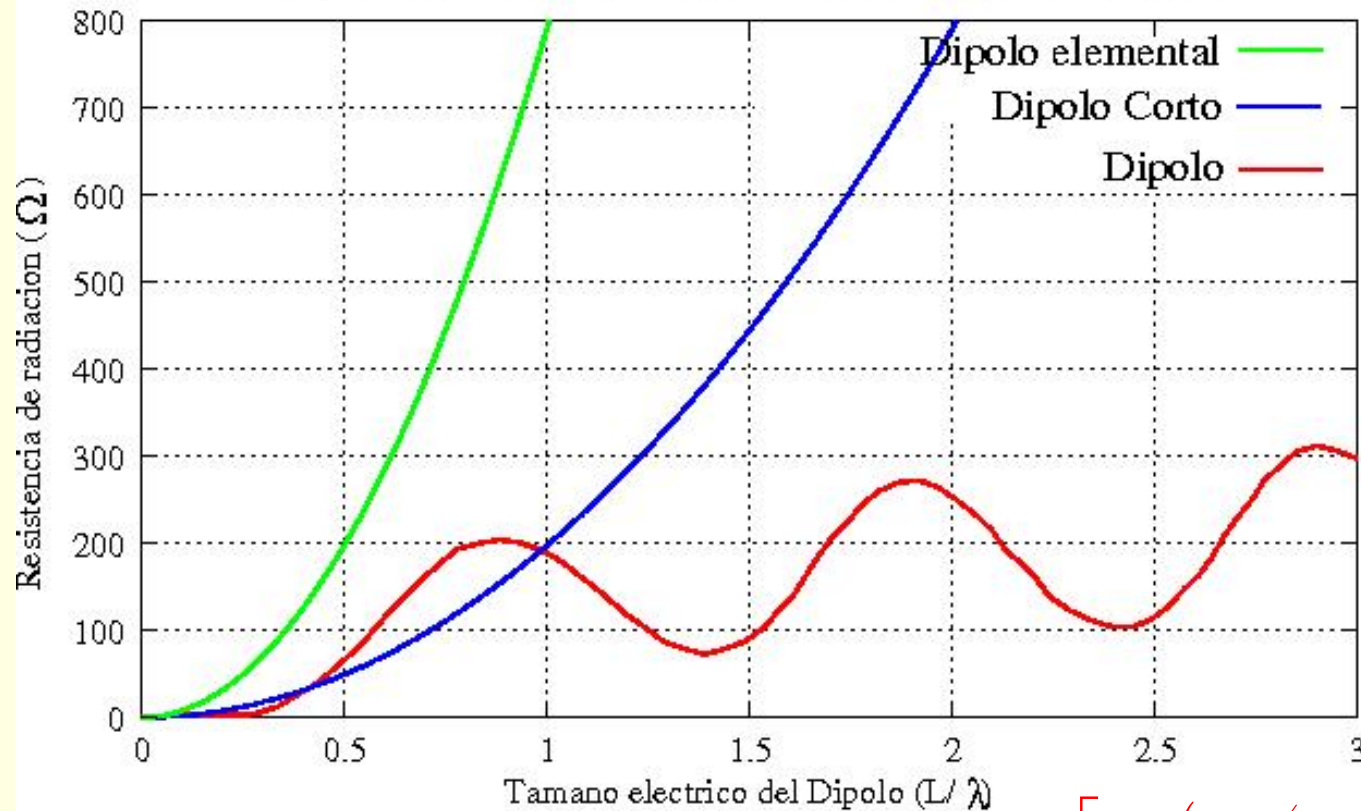
Haciendo uso del valor de esta integral, el valor de la resistencia de radiación es

$$\begin{aligned} R_{rad} &= \frac{2P_{rad}}{I_0^2} = \frac{2}{I_0^2} \frac{\eta I_0^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\left[ \cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right) \right]^2}{\sin \theta} d\theta = \\ &= \frac{\eta}{2\pi} \left\{ C + Ln(kL) - C_i(kL) + \frac{1}{2} \sin(kL) [S_i(2kL) - 2S_i(kL)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos(kL) \left[ C + Ln\left(\frac{kL}{2}\right) + C_i(2kL) - 2C_i(kL) \right] \right\} \end{aligned}$$

En la figura siguiente se representa la resistencia de radiación para diferentes valores de L en longitudes de onda y en el espacio libre ( $\eta = 120\pi$ )

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Resistencia de radiación de diferentes dipolos frente al tamaño eléctrico



$$R_{rad} = 80\pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 [\Omega]$$

$$R_{rad} = 20\pi^2 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 [\Omega]$$

$$R_{rad} = \frac{\eta}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\left[ \cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right) \right]^2}{\sin \theta} d\theta [\Omega]$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

La resistencia de radiación ha sido evaluada a partir del valor máximo de la corriente ( $I_0$ ) el cual, en la mayoría de las antenas no ocurre en la alimentación como por ejemplo en antena dipolo de longitud  $L=\lambda/4, 3\lambda/4, \lambda$ , etc.

A partir de la potencia, podemos relacionar la resistencia de radiación a la resistencia de radiación referido a los terminales de entrada, esto es,

$$\frac{I^2(0)R_{in}}{2} = \frac{I_0^2}{2} R_{rad} \Rightarrow R_{in} = \left( \frac{I_0}{I(0)} \right)^2 R_{rad}$$

Para el caso del dipolo de longitud arbitraria, la corriente en los terminales de entrada viene dada por

$$I(0) = I_0 \operatorname{sen} \left( k \frac{L}{2} \right) \Rightarrow R_{in} = \frac{R_{rad}}{\operatorname{sen}^2 \left( k \frac{L}{2} \right)}$$

Como puede verse, sólo para antenas múltiplos de media longitud de onda, la resistencia de radiación coincide con la resistencia de entrada (parte real de la impedancia de entrada). Para el caso general, la resistencia y la reactancia de entrada de una antena arbitraria viene dada por las expresiones:

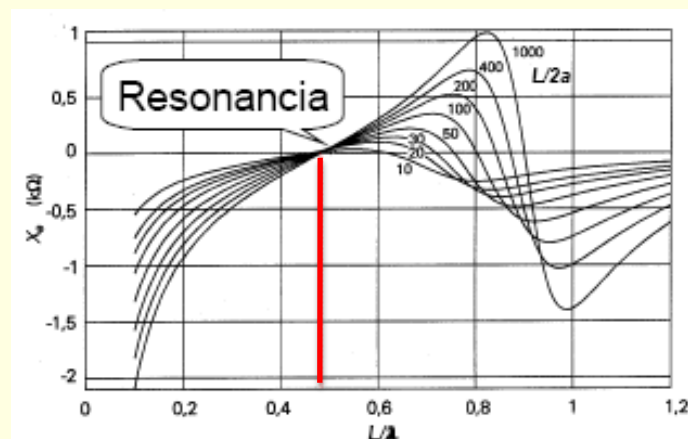
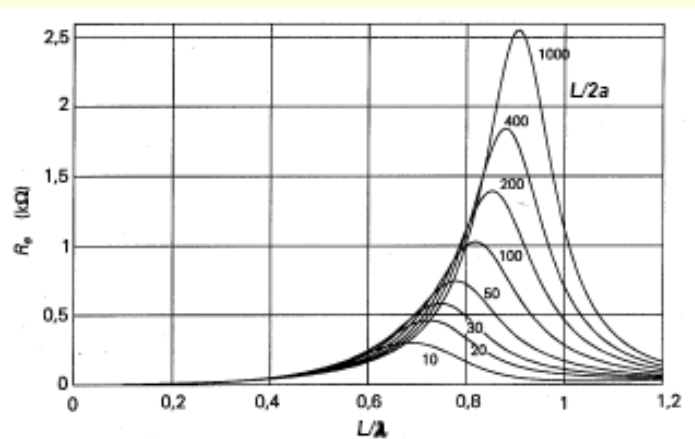
## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

$$R_a = \frac{\eta}{2\pi \sin(kL/2)} \left\{ C + \ln(kL) - C_i(kL) + \frac{1}{2} \sin(kL) [S_i(2kL) - 2S_i(kL)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cos(kL) \left[ C + \ln\left(\frac{kL}{2}\right) + C_i(2kL) - 2C_i(kL) \right] \right\}$$

$$X_a = 30 \left\{ 2S_i(kL) + \cos(kL) [2S_i(kL) - S_i(2kL)] - \sin(kL) \left[ 2C_i(kL) - C_i(2kL) - C_i\left(\frac{2Ka^2}{L}\right) \right] \right\}$$

donde  $a$  es el radio de la antena. La reactancia del dipolo depende además de la relación entre el cuadrado del radio y su longitud, lo que influirá en el ancho de banda de la antena. Cuanto menor sea el radio, mayor es el ancho de banda



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

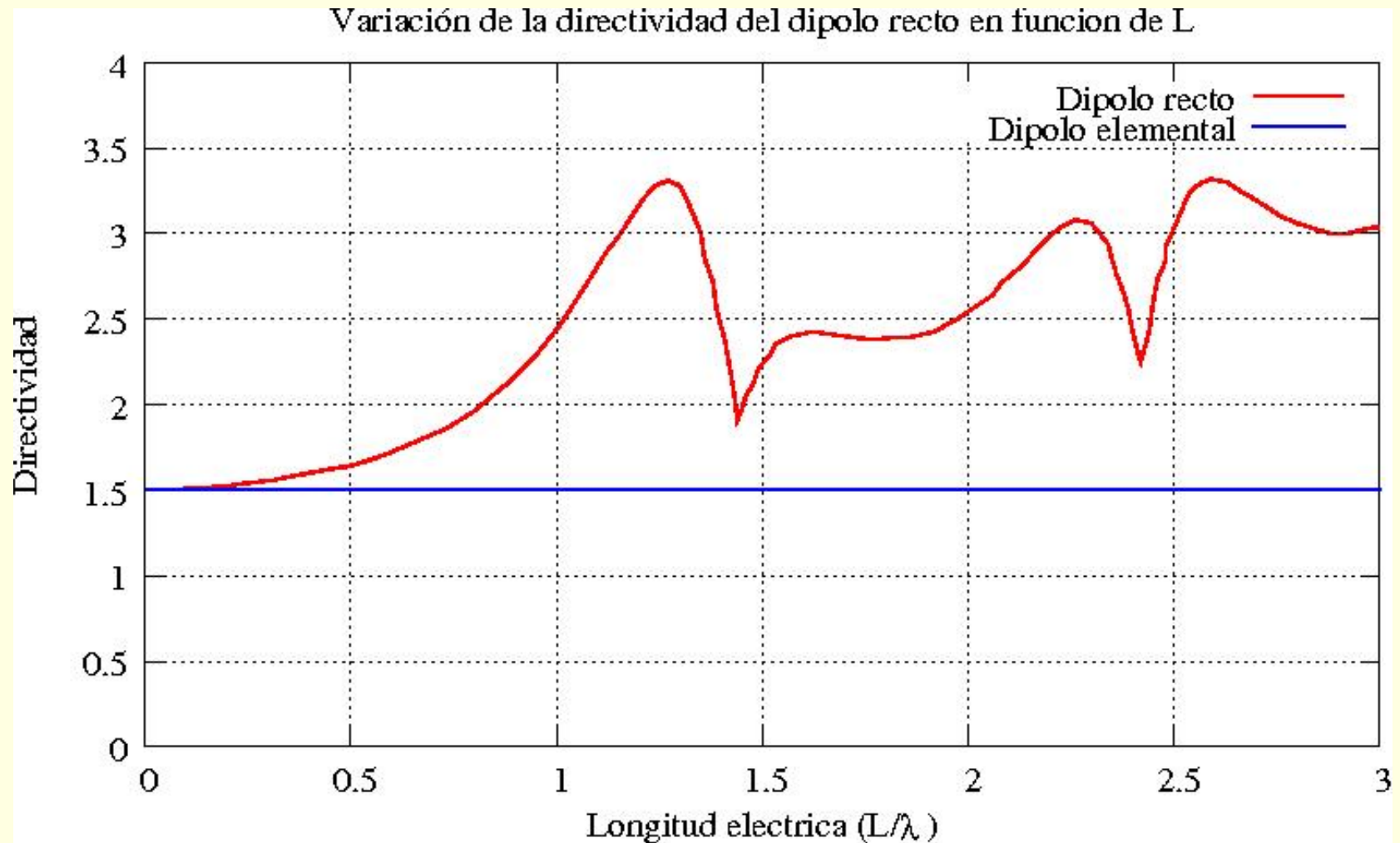
Como puede verse de la gráfica, para  $\lambda/2 < L < \lambda$  la reactancia de entrada es positiva y por tanto su modelo equivalente es el de una resistencia en serie con una bobina. Para  $L < \lambda/2$  la reactancia es negativa, por lo que la antena se puede modelar, de forma circuital, como una resistencia en serie con un condensador.

A partir de la potencia total radiada puede evaluarse la directividad

$$D = \frac{\mathcal{P}_{\text{máx}} 4\pi r^2}{\frac{\eta}{2\pi} I_m^2 \int_0^\pi \frac{\left[ \cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right) \right]^2}{\sin \theta} d\theta} = 2 \frac{\left[ \frac{\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{\sin \theta} \right]^2 \Big|_{\text{máx}}}{\int_0^\pi \frac{\left[ \cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right) \right]^2}{\sin \theta} d\theta}$$

La directividad del dipolo varía y depende de la longitud del mismo en longitudes de onda. La directividad frente al tamaño eléctrico de la antena se puede ver en la siguiente transparencia

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Veamos la longitud efectiva. Para ello basta con evaluar la relación

$$\vec{l}_{ef} = \frac{\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{N})}{I(0)} = \left( \frac{\lambda}{\pi} \right) \frac{\cos\left(k \frac{L}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{\text{sen}\left(k \frac{L}{2}\right) \text{sen} \theta} \hat{\theta}$$

En la dirección normal al hilo  $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ , la longitud efectiva es máxima por lo que

$$\vec{l}_{ef} \Big|_{\text{máx}} = \frac{\lambda}{\pi} \left( \frac{1 - \cos\left(k \frac{L}{2}\right)}{\text{sen}\left(k \frac{L}{2}\right)} \right) \hat{\theta}$$

### e) Dipolo resonante o dipolo de media longitud de onda

Un caso particular del dipolo de longitud arbitraria es aquel cuya longitud es media longitud de onda ( $L = \lambda/2$ ). Esta es la antena más usada debido a que la reactancia de la misma se hace cero como puede verse en la grafica de la transparencia 34. Además la

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

la resistencia de radiación presenta un valor de aproximadamente  $73 \Omega$  que es bastante parecida a los  $75 \Omega$  que presenta muchas de las líneas de transmisión.

Los campos de radiación para la antena resonante son

$$E_{\theta} = 60 j \frac{e^{-jkr}}{r} I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}$$
$$H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{\eta} = j \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}$$

La densidad de potencia media

$$\vec{\wp} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E} \times \vec{H}^* \right] = \frac{\eta}{8\pi^2 r^2} I_0^2 \frac{\left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \right]^2}{\sin^2 \theta} \hat{r}$$

y la intensidad de radiación

$$K(\theta, \phi) = \wp(\theta, \phi) r^2 = \frac{\eta}{8\pi^2} I_0^2 \frac{\left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \right]^2}{\sin^2 \theta}$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

La representación tridimensional del diagrama de radiación es el siguiente

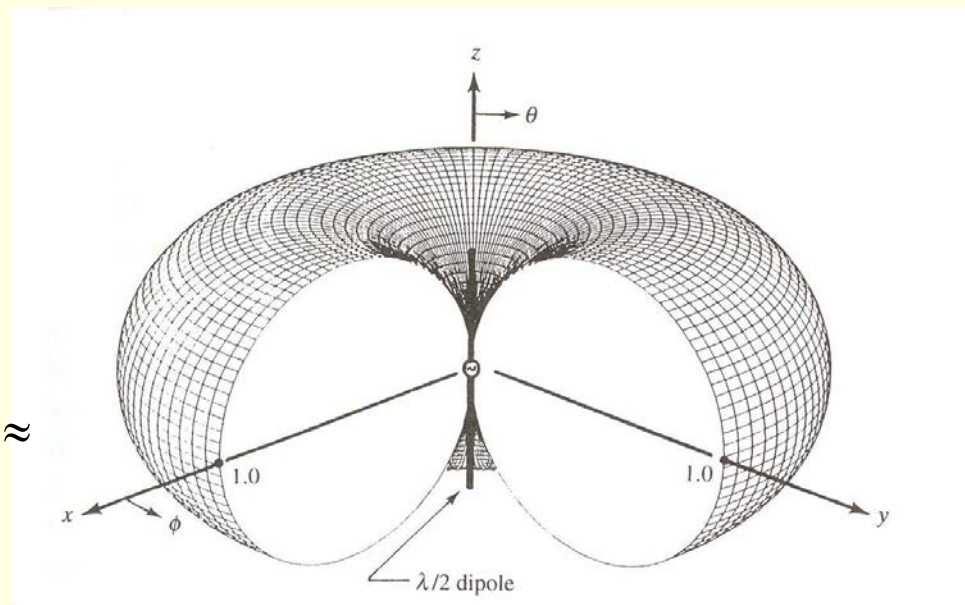
La potencia total radiada se obtiene como  $P_{rad} = \frac{\eta}{4\pi} I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = \frac{\eta}{8\pi} I_0^2 C_{in}(2\pi)$  donde

$$C_{in}(2\pi) = 0.5772 + \ln(2\pi) - C_i(2\pi) = \\ = 0.5772 + 1.838 - (-0.02) \cong 2.435$$

$$\text{por tanto } P_{rad} = \frac{\eta}{8\pi} I_0^2 (2.435) = 36.525 I_0^2$$

La directividad será

$$D = \frac{K_{\max} 4\pi}{P_{rad}} = 4\pi \frac{K_{\theta=\pi/2}}{P_{rad}} = \frac{4}{C_{in}(2\pi)} = \frac{4}{2.435} \approx \\ \approx 1.6432$$



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

El área efectiva máxima para el dipolo resonante es  $A_{efmax}=0.13\lambda^2$  y la longitud efectiva máxima

$$\vec{l}_{ef} \Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{\lambda}{\pi} \hat{\theta}$$

La resistencia de radiación será

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_0^2} = \frac{2\eta \frac{I_0^2}{8\pi} C_{in}(2\pi)}{I_0^2} \approx 73\Omega$$

En este caso la resistencia de radiación coincide con la resistencia de entrada en los terminales de la alimentación, ya que esto ocurre cuando la longitud del dipolo es un múltiplo de media longitud de onda.

La impedancia de entrada para una antena de longitud un múltiplo  $n$  de  $\lambda/2$  se reduce a

$$Z_a = 30 \left[ C_{in}(2\pi n) + jS_i(2\pi n) \right]$$

y para el caso de  $n=1$

$$Z_a = 73.1 + j42.5 \quad [\Omega]$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

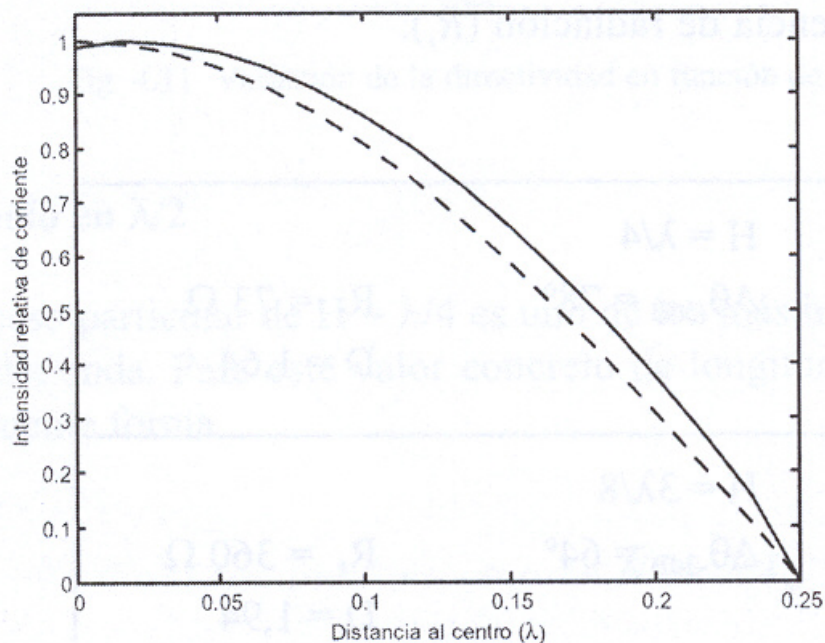
En la figura siguiente se presenta algunas de las características de radiación para dipolos de diferentes longitudes eléctricas.

En la tabla se observa un valor inadecuado para la resistencia de radiación, esto es, presenta valor infinito para antenas de onda completa. La explicación a esto estriba en la aproximación realizada sobre la distribución de corriente en la misma tal y como se puede ver en la figura adjunta.

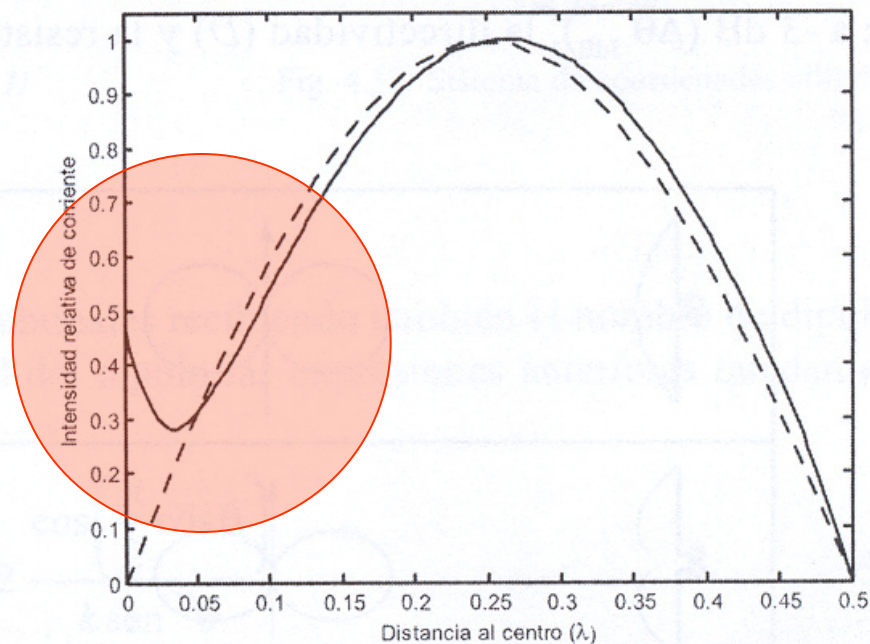
		$L/2 = \lambda/4$ $\Delta\theta_{3dB} = 78^\circ$	$R_r = 73 \Omega$ $D = 1,64$
		$L/2 = 3\lambda/8$ $\Delta\theta_{3dB} = 64^\circ$	$R_r = 360 \Omega$ $D = 1,94$
		$L/2 = \lambda/2$ $\Delta\theta_{3dB} = 48^\circ$	$R_r = \infty \Omega$ $D = 2,41$
		$L/2 = 5\lambda/8$ $\Delta\theta_{3dB} = 33^\circ$	$R_r = 210 \Omega$ $D = 3,33$
		$L/2 = 3\lambda/4$ $\Delta\theta_{3dB} = 33^\circ$ $\theta_{max} = 43^\circ$	$R_r = 99,5 \Omega$ $D = 2,17$
		$L/2 = \lambda$ $\Delta\theta_{3dB} = 27^\circ$ $\theta_{max} = 57^\circ$	$R_r = \infty \Omega$ $D = 2,52$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

$$L = \frac{\lambda}{2}$$



$$L = \lambda$$



— Método de los Momentos

- - - Aproximación sinusoidal

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

## 3.- Autoimpedancia e impedancia mutua

Antes de definir el concepto de autoimpedancia e impedancia mutua, vamos a ver un teorema importante en antenas, el teorema de reciprocidad.

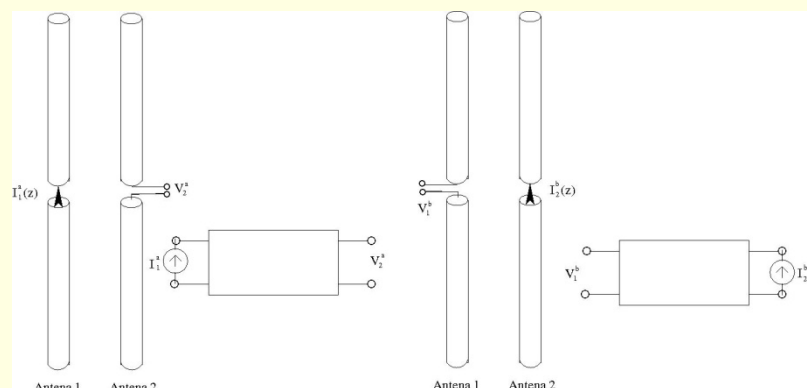
El teorema de reciprocidad puede enunciarse como: “Dos conjuntos de fuentes eléctricas  $\vec{J}^a, \vec{J}^b$ , trabajando a la misma frecuencia y limitadas a un volumen finito  $V$  de un medio lineal homogéneo e isótropo, que producen un conjunto de campos  $\vec{E}^a, \vec{E}^b$  y  $\vec{H}^a, \vec{H}^b$  se cumple:

$$\int_{V'} \vec{E}^b \cdot \vec{J}^a dV' = \int_{V'} \vec{E}^a \cdot \vec{J}^b dV'$$

Si además existen fuentes magnéticas, entonces,

$$\int_{V'} (\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a) dV' = \int_{V'} (\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b) dV'$$

Para el caso de dos antenas en cualquiera de las siguientes configuraciones, esta expresión se reduce



$$\int_{\text{antena 1}} E_z^a J^b dz' = \int_{\text{antena 2}} E_z^b I^a dz' \Rightarrow I_2^b V_2^a = I_1^a V_1^b \Rightarrow \left. \frac{V_2^a}{I_1^a} \right|_{I_2^a=0} = \left. \frac{V_1^b}{I_2^b} \right|_{I_1^b=0}$$

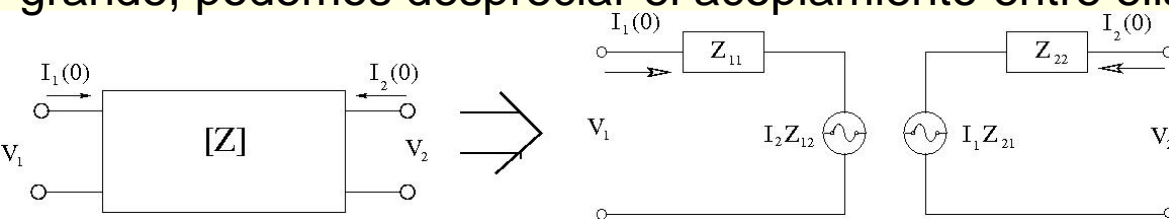
## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

De la expresión anterior se deduce que la antena transmisora y la antena receptora forman un cuadripolo definido por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= I_1(0)Z_{11} + I_2(0)Z_{12} \\ V_2 &= I_1(0)Z_{21} + I_2(0)Z_{22} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{12} = \left. \frac{V_2^a}{I_1^b} \right|_{I_2^a=0} \stackrel{T. Reciprocidad}{=} \left. \frac{V_1^b}{I_2^a} \right|_{I_1^b=0} = Z_{21}$$

Del teorema de reciprocidad se pueden extraer como consecuencia que las impedancias en transmisión son iguales a las de recepción

Si la distancia entre antena transmisora y antena receptora es lo suficientemente grande, podemos despreciar el acoplamiento entre ellas, por lo que



$$\left. \begin{aligned} V_1 &= I_1(0)Z_{11} + I_2(0)Z_{12} \\ V_2 &= I_1(0)Z_{21} + I_2(0)Z_{22} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + \underbrace{Z_{12} \frac{I_2}{I_1}}_{\approx 0} \approx Z_{11}$$

Si se cambia la antena trans. Por la recep. y viceversa se tiene que, tanto en transmisión como en recepción la impedancia de entrada es  $Z_{11}$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Otra consecuencia es la igualdad en los diagramas de radiación de antenas en transmisión y en antenas en recepción.

Como hemos visto, cuando dos antenas están relativamente próximas entre sí, existe influencia de una antena sobre la otra, la cual se manifiesta afectando a la impedancia de entrada de la otra antena y viceversa. Para el análisis de este problema consideraremos el conjunto de las dos antenas como un elemento de 4 terminales, esto es,

$$V_1 = -\frac{1}{I_1(0)} \int I_1(z) (E_{11} + E_{12}) dz = I_1(0)Z_{11} + I_2(0)Z_{12}$$

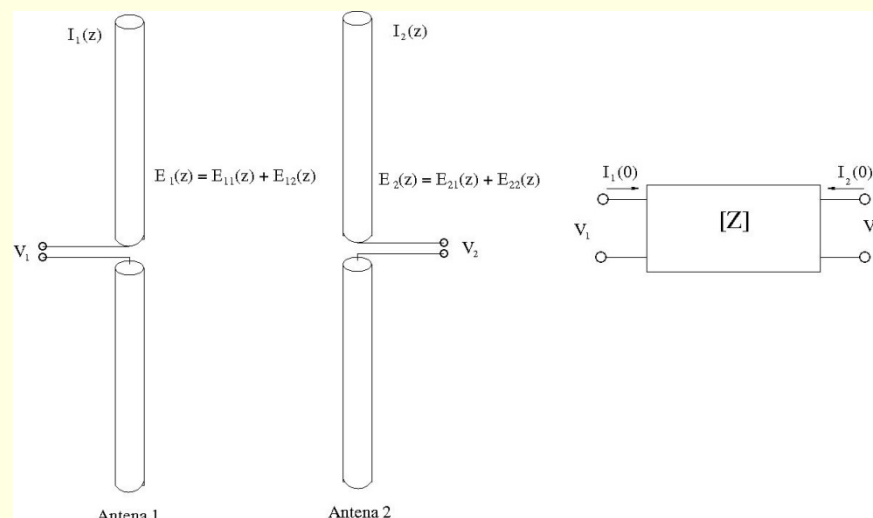
$$V_2 = -\frac{1}{I_2(0)} \int I_2(z) (E_{21} + E_{22}) dz = I_1(0)Z_{21} + I_2(0)Z_{22}$$

Donde se define la autoimpedancia como

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1(0)} \right|_{I_2=0} = -\frac{1}{I_1^2(0)} \int I_1(z) E_{11} dz$$

y la impedancia mutua como

$$Z_{12} = -\frac{1}{I_1(0)I_2(0)} \int I_1(z) E_{12} dz = Z_{21}$$



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Veamos algunos ejemplos de cálculo de impedancias mutuas en antenas lineales. Supongamos dos antenas lineales de longitud  $L$  y separadas una distancia  $d$ . La f.e.m. inducida en los terminales de la 2ª antena, asumiendo una corriente con variación senoidal, se tiene

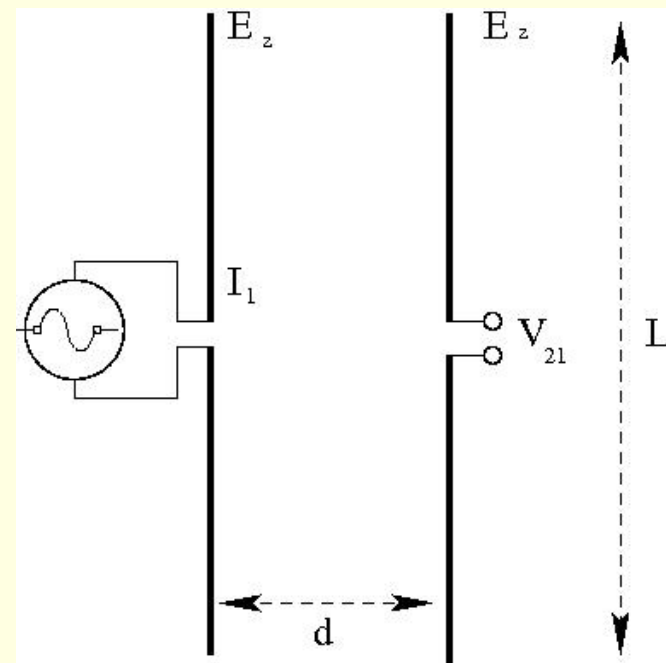
$$I_z = I_2 \sin \beta z \Rightarrow V_{21} = \frac{1}{I_2} \int_0^L I_z E_{21} dz = \frac{1}{I_2} \int_0^L I_2 \sin \beta z E_{21} dz = \int_0^L E_{21} \sin \beta z dz$$

$$Z_{21} = -\frac{V_{21}}{I_1} = -\frac{1}{I_1} \int_0^L E_{21} \sin \beta z dz$$

Las posiciones relativas entre las antenas pueden ser analizadas en base a dos situaciones posibles:

### a.- Impedancia mutua entre dos dipolos paralelos

Esta situación es la mostrada en la figura. La impedancia mutua en esta situación será



$$Z_{21} = -\frac{V_{21}}{I_1} = -\frac{1}{I_1} \int_0^L E_{21} \sin \beta z dz = j30 \int_0^L \left\{ \frac{e^{-jk\sqrt{d^2+z^2}}}{\sqrt{d^2+z^2}} + \frac{e^{-jk\sqrt{d^2+(L-z)^2}}}{\sqrt{d^2+(L-z)^2}} \right\} \sin \beta z dz$$

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Se puede demostrar que para antenas de un número impar de  $\lambda/2$ , esta integral vale

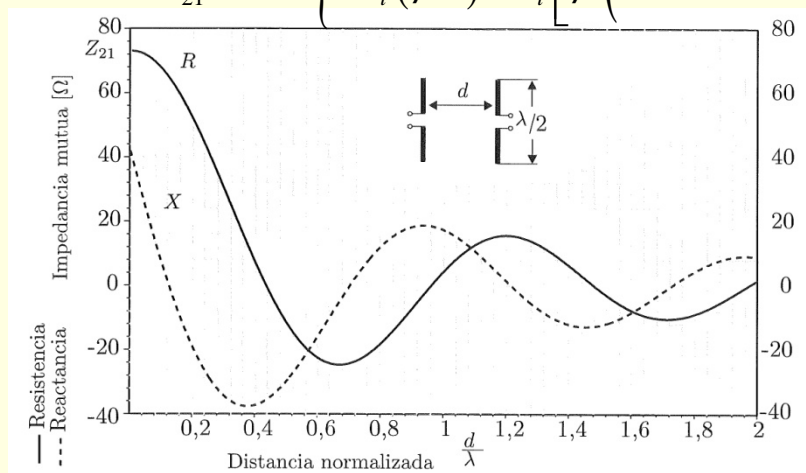
$$Z_{21} = 30 \left\{ 2E_i(-j\beta d) - E_i \left[ -j\beta \left( \sqrt{d^2 + L^2} + L \right) \right] - E_i \left[ -j\beta \left( \sqrt{d^2 + L^2} \right) \right] \right\}$$

donde  $E_i$  viene dado por  $E_i(\pm jy) = C_i(y) \pm jS_i(y)$

La parte real y la imaginaria de la impedancia mutua será \*

$$R_{21} = 30 \left\{ 2C_i(\beta d) - C_i \left[ \beta \left( \sqrt{d^2 + L^2} + L \right) \right] - C_i \left[ \beta \left( \sqrt{d^2 + L^2} - L \right) \right] \right\} \quad (\Omega)$$

$$X_{21} = -30 \left\{ 2S_i(\beta d) - S_i \left[ \beta \left( \sqrt{d^2 + L^2} + L \right) \right] - S_i \left[ \beta \left( \sqrt{d^2 + L^2} - L \right) \right] \right\} \quad (\Omega)$$



\* Estas expresiones fueron deducidas por P.S. Carter y publicadas en "Circuit Relations in Radiating Systems and Applications to Antenna Problems", *Proceedings of the Institute of Radio Engineers (IRE)*, Vol. 20, Num. 6, June 1932

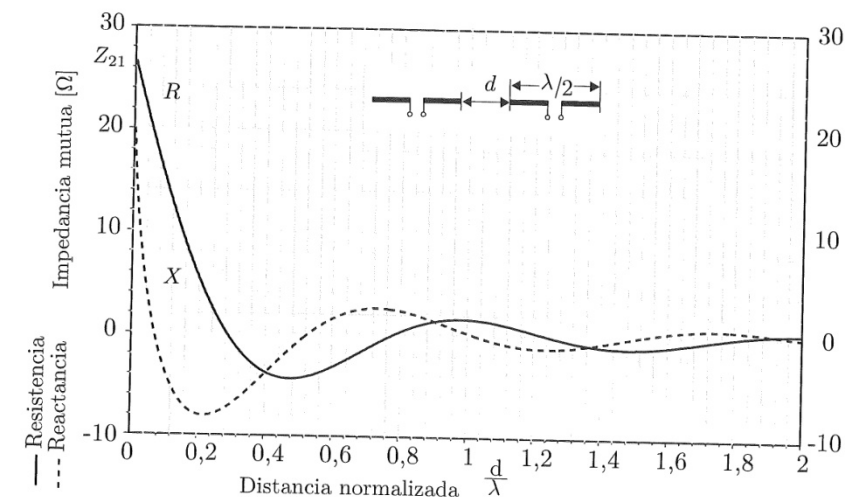
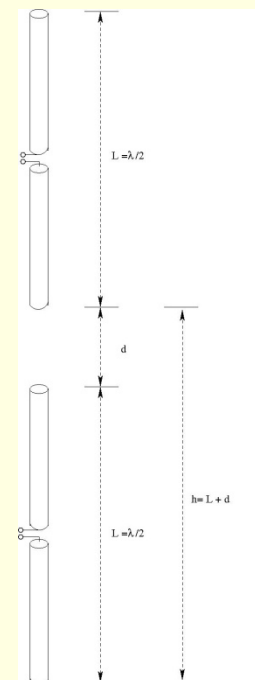
# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

## b.- Impedancia mutua entre dos dipolos colineales

Supongamos ahora una situación como la mostrada en la figura. Para el caso de que  $h$  sea mayor que  $L$ , se puede demostrar que la impedancia mutua viene dada por

$$R_{21} = -15 \cos(\beta h) \left\{ -2C_i(2\beta h) + C_i(2\beta(h-L)) + C_i(2\beta(h+L)) - \ln\left(\frac{h^2 - L^2}{h^2}\right) \right\} +$$

$$+ 15 \sin(\beta h) \left\{ 2S_i(2\beta h) - S_i(2\beta(h-L)) - S_i(2\beta(h+L)) \right\} (\Omega)$$



$$X_{21} = -15 \cos(\beta h) \left\{ 2S_i(2\beta h) - S_i[2\beta(h-L)] - S_i[2\beta(h+L)] \right\} +$$

$$+ 15 \sin(\beta h) \left\{ 2C_i(2\beta h) - C_i(2\beta(h-L)) - C_i(2\beta(h+L)) - \ln\left(\frac{h^2 - L^2}{h^2}\right) \right\} (\Omega)$$

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

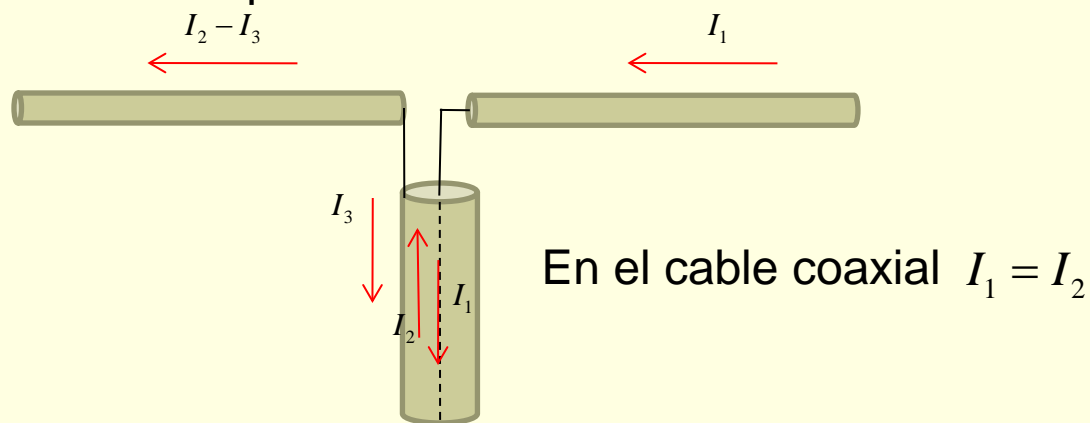
## 4.- Balunes

Uno de los principales problemas que presenta una antena dipolo es la alimentación ya que es muy común el uso de líneas de transmisión coaxiales o microstrip y éstas son asimétricas. Para excitar de forma adecuada una antena dipolo es necesario usar simetrizadores de corriente denominados balunes (**balanced-unbalanced**).

Supongamos que necesitamos alimentar una antena dipolo mediante un cable coaxial tal y como se muestra en la figura

Como puede verse en la figura, conectar el cable coaxial al dipolo hace que fluya un flujo neto de corriente de desde tierra hacia el dipolo.

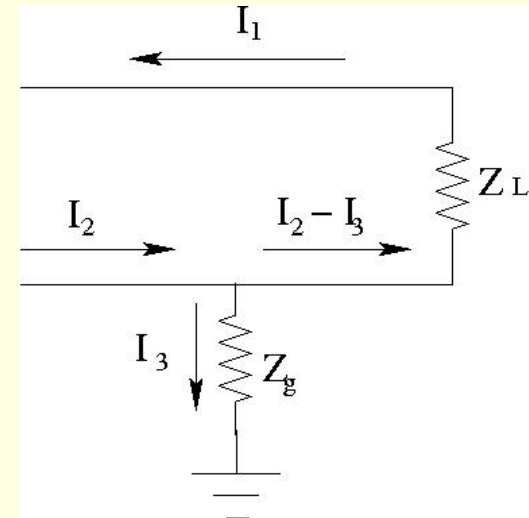
La corriente  $I_3$  está determinada por el valor de la impedancia  $Z_g$  formada por el conductor y dieléctrico del coaxial, tal y como se puede ver en el modelo circuital anexo. Si aumentamos  $Z_g$  disminuimos esta corriente y por



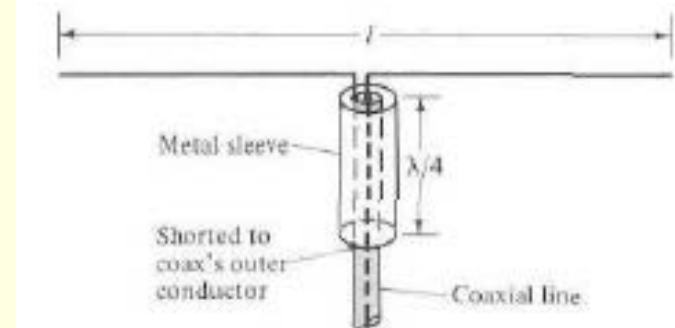
## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

tanto simetrizamos la alimentación. Los dispositivos capaces de aumentar esta impedancia y por tanto disminuir la corriente derivada a tierra se denominan simetrizadores o balunes.

Existen diferentes tipos de configuraciones para los balunes, por ejemplo la que se muestra en la figura se denomina balun bazooka. Este balun usa una sección coaxial de longitud  $\lambda/4$  definida por el exterior del cable coaxial del alimentador como conductor interno y un tubo metálico concéntrico de mayor diámetro como conductor externo el cual se une al interior (se cortocircuita) a una distancia  $\lambda/4$ . De este modo, el cortocircuito se transforma en un circuito abierto en el extremo superior (punto de unión con el dipolo)



Modelo Circuital de una antena alimentada asimétrica



Balun Bazooka (relación de transformación 1:1)

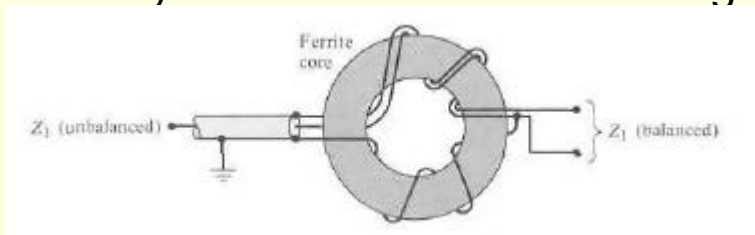
## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

impidiendo el flujo de la corriente  $I_3$  del exterior del coaxial que ocasiona la asimetría.

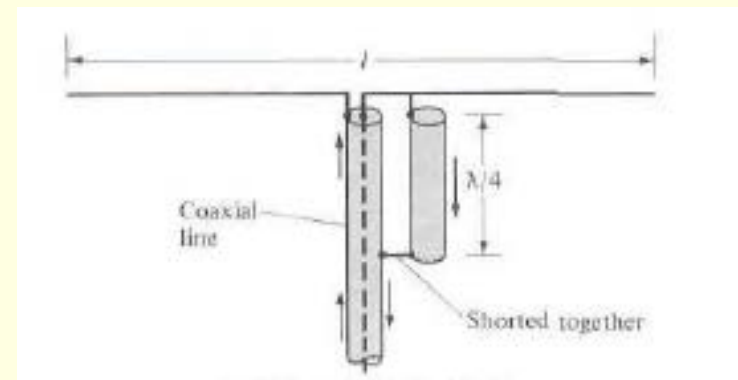
Otro tipo de balun es el coaxial  $\lambda/4$  construido con una sección  $\lambda/4$  que forma una línea bifilar formada por el exterior del cable coaxial y una barra del mismo diámetro tal y como se muestra en la figura.

Otros tipos de balun es el coaxial  $\lambda/2$ , el cual no sólo permite simetrizar la alimentación si no que además adapta la impedancia del coaxial a la antena mediante una transformación de impedancias 4:1.

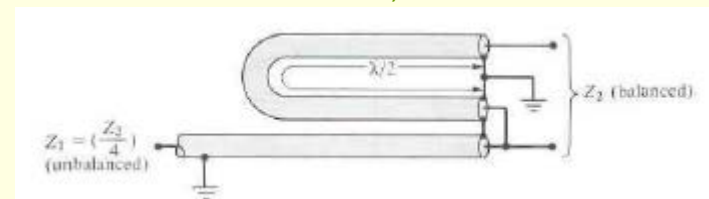
Otros tipos de transformadores usan núcleos de ferrita tal y como se muestra en la figura



Núcleo de ferrita (1:1)



Balun coaxial  $\lambda/4$  (relación de transformación 1:1)



Balun coaxial  $\lambda/2$  (relación de transformación 4:1)

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

## 5.- Dipolos doblados

Ya hemos visto que un dipolo resonante presenta una impedancia de entrada de aproximadamente  $75\Omega$ , por lo que esta estructura queda adaptada con la mayoría de líneas de transmisión basadas en cables coaxiales ( $50-75\Omega$ ). Sin embargo cuando se utiliza con líneas de transmisión basadas en líneas bifiliares (impedancia de aprox.  $300\Omega$ ) es necesario introducir un transformador de impedancias para adaptarla tal y como, por ejemplo el balun de coaxial  $\lambda/2$  visto anteriormente. Una alternativa a este transformador es el dipolo doblado (Folded dipole) ya que, por su construcción (dos dipolos iguales, próximos y conectados en sus extremos), esta estructura presenta una impedancia 4 veces superior a un dipolo resonante ya que se duplican sus campos y por tanto se cuadruplica su potencia. Su estructura es la mostrada en la siguiente figura (configuración de polarización vertical). Esta configuración puede ser estudiada desde el punto de vista de corrientes e impedancias como superposición de dos modos: el modo radiante y el modo de línea de transmisión.



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

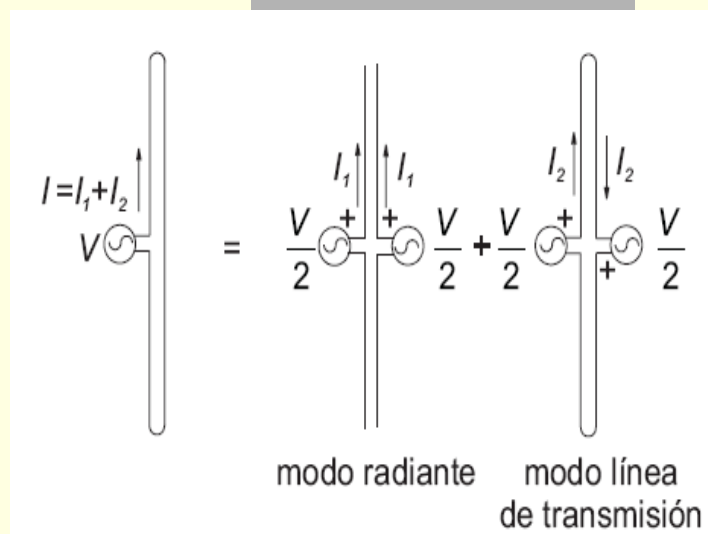
En el primer modo se tiene dos dipolos de media onda alimentados con el mismo generador y muy próximos.

En el segundo modo corresponden a las corrientes y las tensiones en una línea de transmisión no contribuyendo a la radiación pero sí a variar la impedancia de entrada.

En el modo equilibrado de línea de transmisión se tiene un generador con una línea de longitud  $\lambda/4$  acabada en cortocircuito, por lo que la corriente  $I_2$  en

bornes del generador valdrá 0. La relación entre  $V$  e  $I$  en la antena inicial vendrá dada por la suma de los modos, con  $I = I_1 + I_2$ , por lo que la impedancia de entrada del dipolo doblado es cuatro veces la del dipolo simple. Al igual que éste, el dipolo doblado se suele hacer ligeramente más corto para eliminar la componente reactiva de la impedancia de entrada.

Otra ventaja del dipolo doblado es su comportamiento con la frecuencia. A frecuencias inferiores a la de resonancia el dipolo presenta un brazo menor de  $\lambda/4$ , por lo que la reactancia en el modo radiante será capacitiva mientras que en el modo de línea de



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

transmisión será inductiva, y se producirá una compensación. A frecuencias superiores a la de resonancia el comportamiento es el inverso y se produce también esa compensación, por lo que el ancho de banda del dipolo doblado es mayor que el del dipolo simple.

Este tipo de antenas se usa ampliamente en las bandas de VHF y UHF y principalmente con polarización vertical.

### 6.- Monopolos frente a planos conductores. Efecto de la tierra sobre el diagrama de radiación

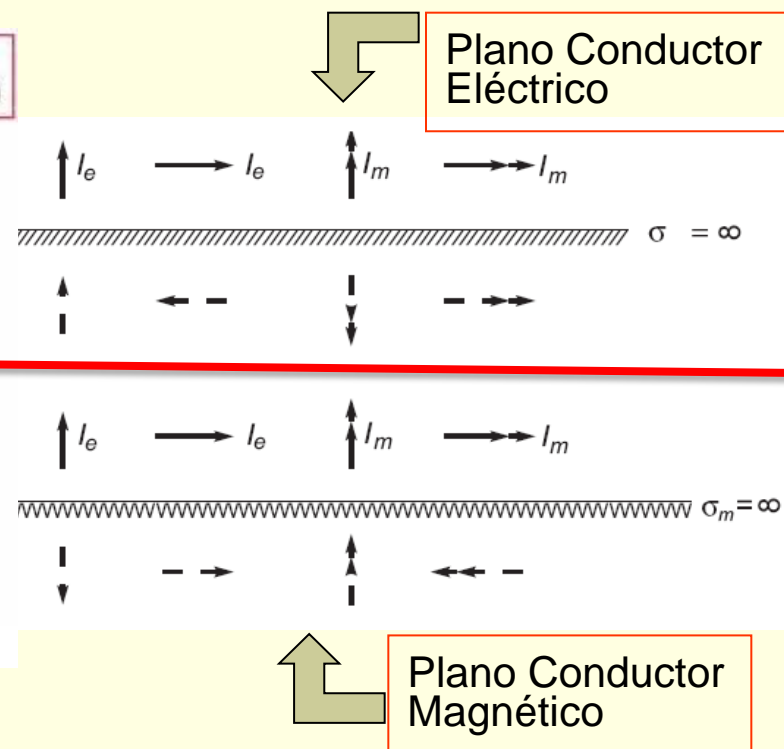
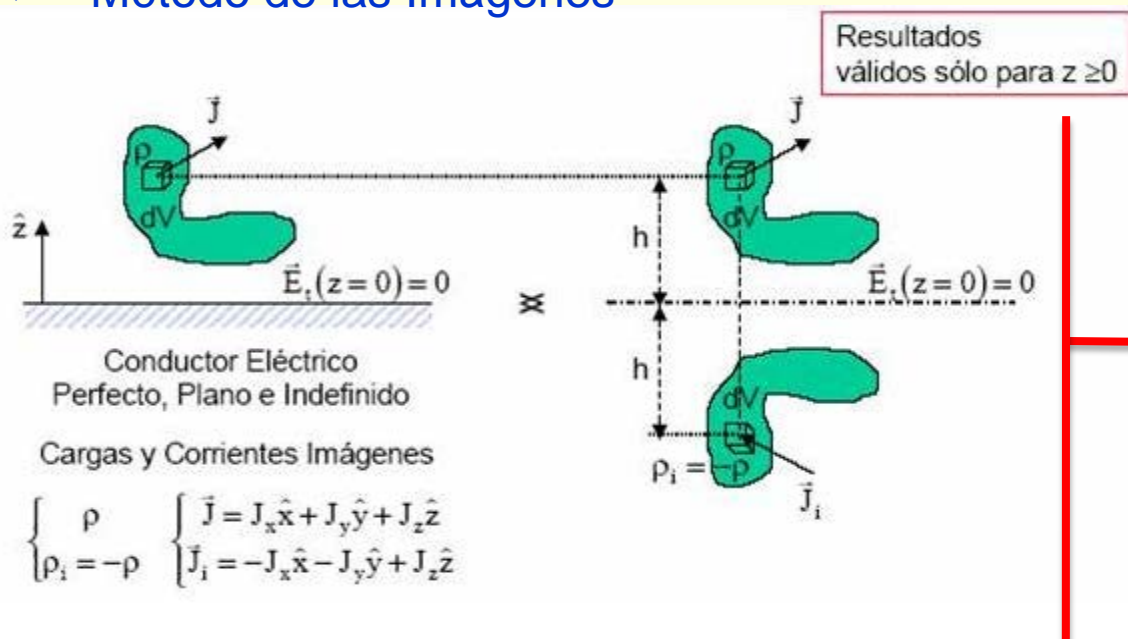
Hasta ahora hemos considerado la antena totalmente aislada. La presencia de algún obstáculo puede alterar el diagrama de radiación de la misma. El obstáculo más

habitual es la presencia de la propia tierra ya que la energía radiada por la antena en dirección a ella será reflejada en mayor o menor grado, dependiendo de su conductividad (este efecto ya se vio en el tema 3). Para simplificar el problema supondremos que la tierra es un conductor perfecto, plano y de extensión infinita, y lo analizaremos mediante el método de las imágenes.



# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

## ✓ Método de las Imágenes



Con las condiciones de contorno en el plano  $Z=0$

$$\hat{z} \times \vec{E} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow E_x \Big|_{z=0} = E_y \Big|_{z=0} = 0$$

$$\hat{z} \cdot \vec{B} \Big|_{z=0} = 0 \Rightarrow B_z \Big|_{z=0} = 0$$

# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

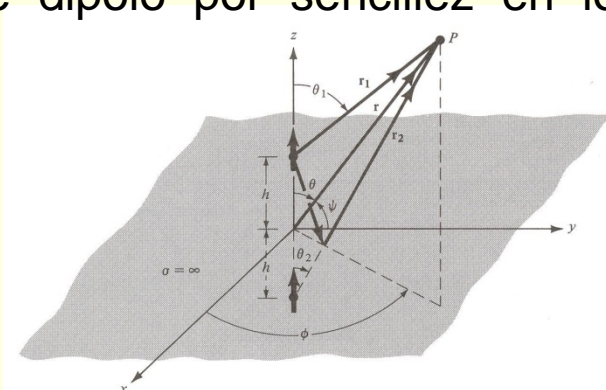
## ✓ Dipolo eléctrico vertical

El método de las imágenes nos permite abordar un problema como el mostrado en a figura, esto es un dipolo elemental (se hace con este dipolo por sencillez en los cálculos) frente a un plano conductor a una altura  $h$ .

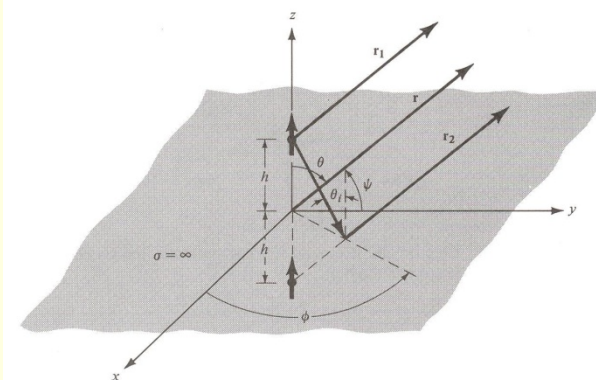
El método nos permite sustituir el plano conductor por un conjunto de cargas y corrientes imágenes tales que se cumplan las condiciones de frontera del problema original (tal y como se muestra en la figura). Aplicando superposición, el campo total en zona de campo lejano será la suma de la componente directa más la componente reflejada.

Tomando como referencia la gráfica de la transparencia siguiente, el cálculo de cada componente de campo es

$$E_{\theta}^d = j\eta \frac{kI_0 L e^{-jkR_1}}{4\pi R_1} \sin\theta_1 \quad \text{y} \quad E_{\theta}^r = j\eta \Gamma \frac{kI_0 L e^{-jkR_2}}{4\pi R_2} \sin\theta_2$$



(a) Vertical electric dipole above ground plane



(b) Far-field observations

## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Dado que se tiene polarización vertical, el coeficiente de reflexión de un plano conductor perfecto es igual a 1 y por tanto

$$E_{\theta} = E_{\theta}^d + E_{\theta}^r = j\eta \frac{kI_0 L e^{-jkR_1}}{4\pi R_1} \sin\theta_1 + j\eta \frac{kI_0 L e^{-jkR_2}}{4\pi R_2} \sin\theta_2$$

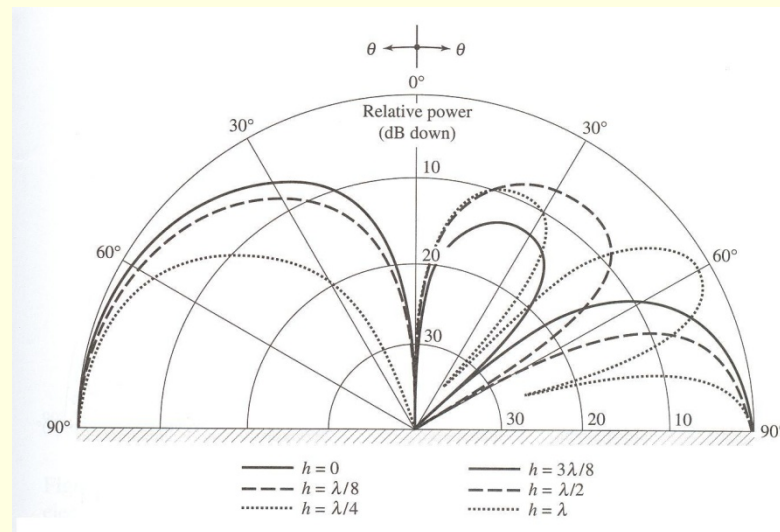
Con la aproximación de campo lejano en fases y módulos

$$\text{fases} \begin{cases} R_1 \simeq r - h \cos \theta \\ R_2 \simeq r + h \cos \theta \end{cases} \quad \text{y para módulos } R_1 \simeq r \simeq R_2$$

se tiene

$$E_{\theta} = E_{\theta}^d + E_{\theta}^r = j\eta \frac{kI_0 L e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\theta \left[ 2 \cos(kh \cos \theta) \right]$$

El diagrama de radiación en campo de un dipolo elemental frente a un plano conductor para diferentes alturas es el mostrado en la figura



## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

La potencia radiada viene dada por

$$P_{rad} = \oiint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} |E_\theta|^2 r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \pi\eta \left( \frac{I_0 L}{\lambda} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right]$$

La intensidad de radiación

$$K(\theta, \phi) = r^2 \vec{\mathcal{E}} = r^2 \left( \frac{1}{2\eta} |E_\theta|^2 \right) = \frac{\eta}{2} \left( \frac{I_0 L}{\lambda} \right)^2 \sin^2\theta \cos^2(kh \cos\theta) \Rightarrow K_{\max} = \frac{\eta}{2} \left( \frac{I_0 L}{\lambda} \right)^2$$

La directividad viene dada por  $D = \frac{4\pi K_{\max}}{P_{rad}} = \frac{2}{\left[ \frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right]}$

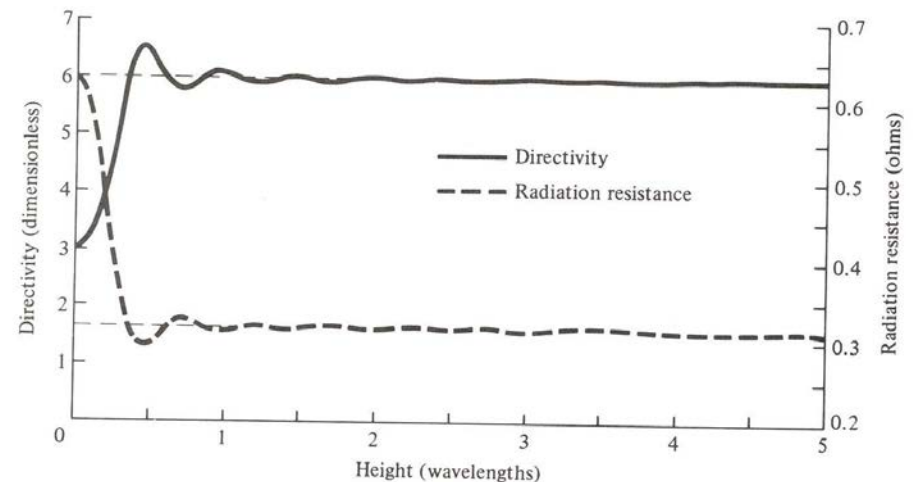
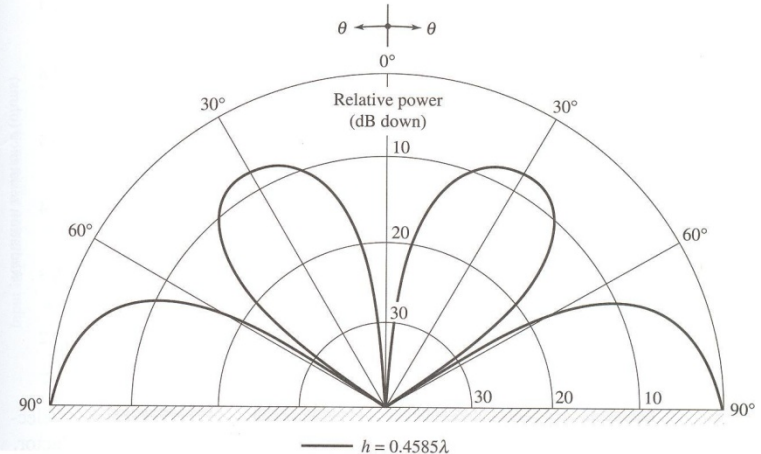
el cual toma un valor 3 para el caso de  $kh=0$  y toma un valor máximo ( $D=6.566$ ) cuando  $kh=2.881$  o bien cuando  $h=0.4585\lambda$ . El diagrama de radiación para el máximo valor de la directividad es

# Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

La resistencia de radiación puede escribirse como

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_0^2} = 2\pi\eta \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right]$$

Cuando  $kh=0$  el valor de la resistencia de radiación se hace la mitad del que valor que toma el dipolo en el espacio libre. La gráfica de la resistencia de radiación y la directividad viene dada por



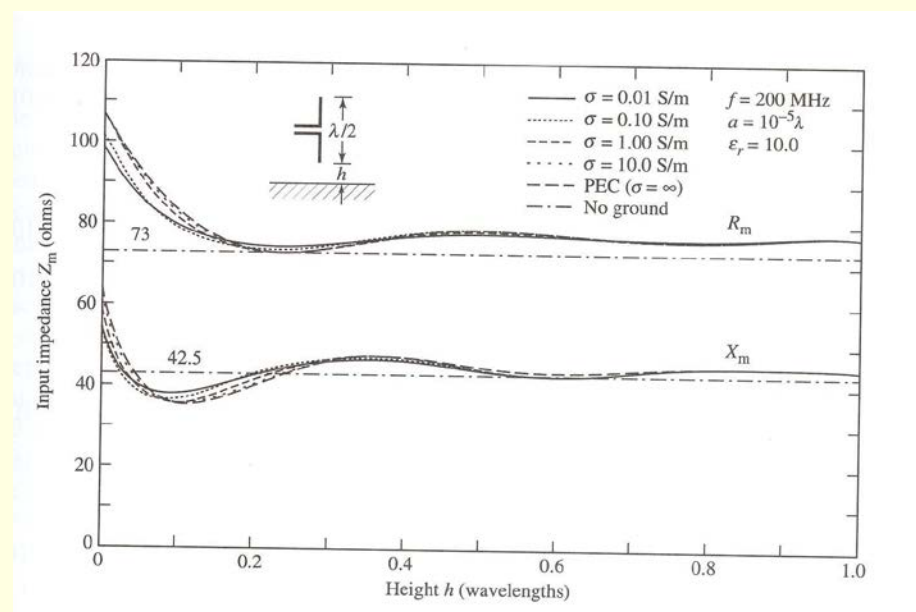
## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

En la práctica, una antena muy usada es aquella en la que  $kh=0$  y la longitud del mismo igual a un cuarto de longitud de onda. A esta configuración se le denomina monopolo de longitud  $\lambda/4$ . Según la teoría de imágenes, el modelo matemático de esta configuración equivale a un dipolo de longitud  $\lambda/2$  radiando en el espacio libre y cuyas soluciones sólo son válidas en la región  $z \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Los campos de radiación serán los producidos por una antena dipolo resonante y la impedancia de entrada referida a la máxima corriente vendrá dada por

$$Z_{in}^{monopolo} = \frac{1}{2} Z_{in}^{dipolo} = \frac{1}{2} [73.1 + j42.5] = 36.5 + j21.5$$

En la figura se muestra los valores de la impedancia de entrada para diferentes valores de la conductividad



# Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

## ✓ Dipolo eléctrico horizontal

Otra configuración muy usada (sobre todo en terminales de telefonía móvil como son la antena F invertida, etc.) es la de un dipolo con polarización horizontal. El análisis de este problema es idéntico al anterior, sustituyendo el plano conductor por su dipolo imagen y sumando las contribuciones de la onda directa y de la reflejada. Recordar que para polarización horizontal, el coeficiente de reflexión presenta una inversión de fase, esto es,  $\Gamma = -1$ , por lo que

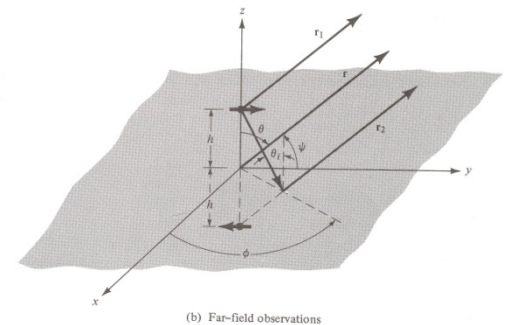
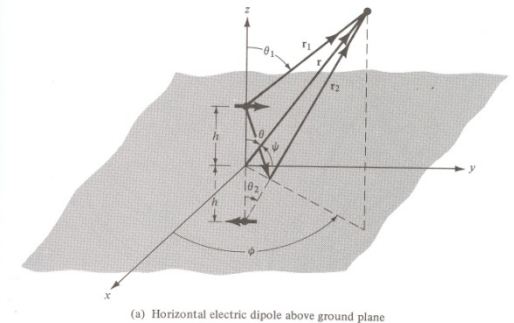
$$E_{\theta} = E_{\theta}^d + E_{\theta}^r = j\eta \frac{kI_0 L e^{-jkR_1}}{4\pi R_1} \sin\Psi - j\eta \frac{kI_0 L e^{-jkR_2}}{4\pi R_2} \sin\Psi$$

donde

$$\cos\Psi = \sin\theta\sin\phi \Rightarrow \sin\Psi = \sqrt{1 - \cos^2\Psi} = \sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2\phi}$$

Aplicando la aproximación de campo lejano en fases y módulos se tiene

$$\text{fases} \begin{cases} R_1 \simeq r - h \cos\theta \\ R_2 \simeq r + h \cos\theta \end{cases} \quad \text{y para módulos } R_1 \simeq r \simeq R_2$$



# Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Sustituyendo se tiene

$$E_{\theta} = E_{\theta}^d + E_{\theta}^r = j\eta \frac{kI_0 L e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi} [2j \sin(kh \cos \theta)]$$

El diagrama de campo para varias posiciones de h es el mostrado en la figura.

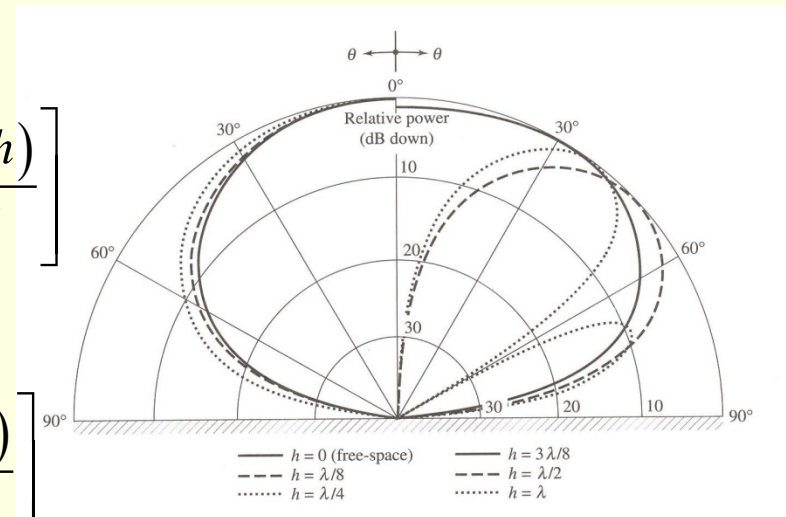
La potencia radiada vendrá dada por

$$P_{rad} = \eta \frac{\pi}{2} \left( \frac{I_0 L}{\lambda} \right)^2 \left[ \frac{2}{3} - \frac{\sin(2kh)}{(2kh)} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right]$$

y la resistencia de radiación

$$R_{rad} = \eta \pi \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \left[ \frac{2}{3} - \frac{\sin(2kh)}{(2kh)} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right]$$

En el límite de  $kh=0$  se tiene  $R_{rad}^{kh \rightarrow 0} = \eta \frac{32\pi^3}{15} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2$



# Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

La intensidad de radiación

$$K(\theta, \phi) = r^2 \vec{\mathcal{E}} = r^2 \left( \frac{1}{2\eta} |E_\theta|^2 \right) = \frac{\eta}{2} \left( \frac{I_0 L}{\lambda} \right)^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \sin^2(kh \cos \theta)$$

El valor máximo dependerá del valor  $kh$  y se puede demostrar que

$$K_{\max} = \begin{cases} \frac{\eta}{2} \left( \frac{I_0 L}{\lambda} \right)^2 \sin^2(kh) & \forall kh \leq \pi/2 \quad (h \leq \lambda/4) \\ & (\theta = 0^\circ) \\ \frac{\eta}{2} \left( \frac{I_0 L}{\lambda} \right)^2 & \forall kh > \pi/2 \quad (h > \lambda/4) \\ & (\phi = 0^\circ \text{ y } \sin(kh \cos \theta_{\max}) = 1) \end{cases}$$

La directividad viene dada por

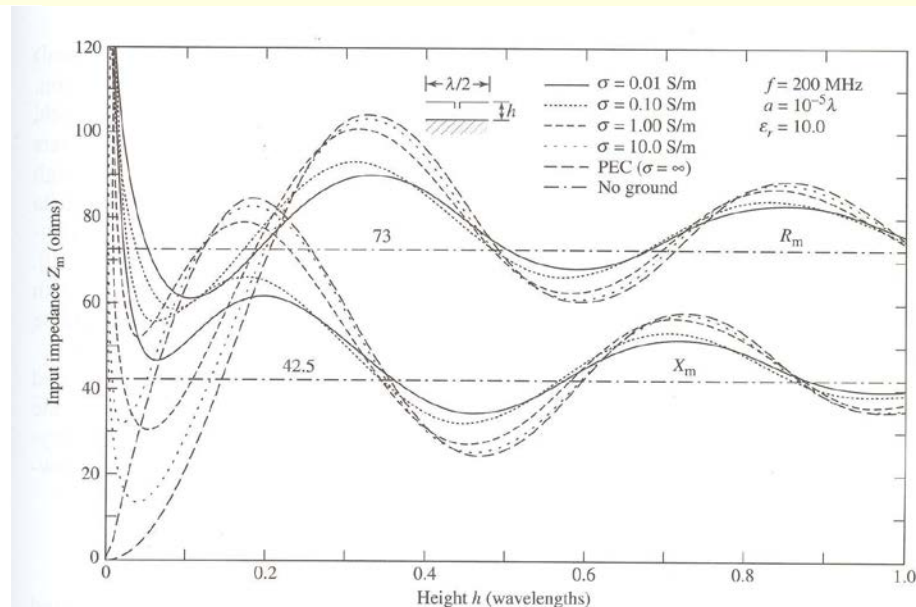
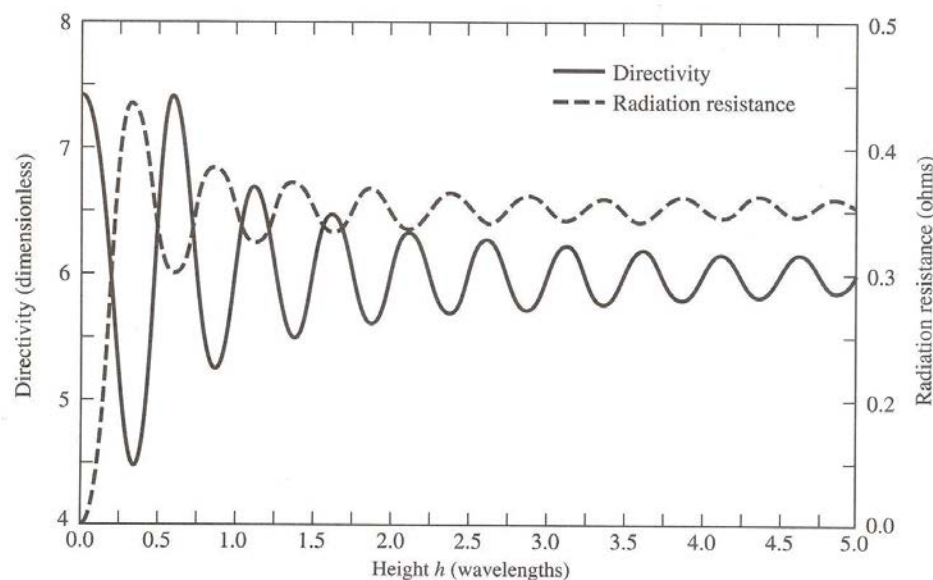
$$D = \begin{cases} \frac{4 \sin^2(kh)}{R(kh)} & \forall kh \leq \pi/2 \quad (h \leq \lambda/4) \\ \frac{4}{R(kh)} & \forall kh > \pi/2 \quad (h > \lambda/4) \end{cases} \quad \text{donde } R(kh) = \left[ \frac{2}{3} - \frac{\sin(2kh)}{(2kh)} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right]$$

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Para valores  $kh \rightarrow 0$ , la directividad se reduce a

$$D^{kh \rightarrow 0} = 7.5 \left( \frac{\text{sen}(kh)}{kh} \right)^2$$

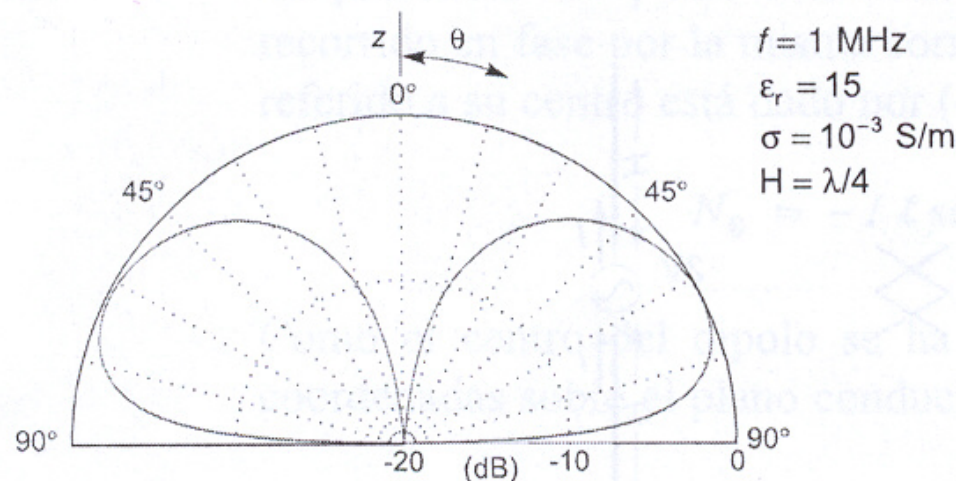
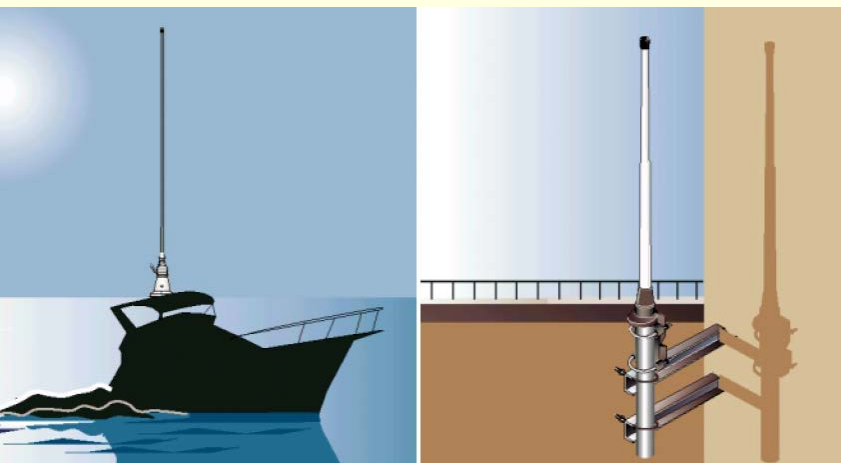
En la siguiente gráfica se representa la directividad, la resistencia de radiación y la impedancia de entrada.



## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

### ✓ Efecto de tierra con conductividad finita

Debido a las reflexiones en la tierra, el efecto principal de esta sobre una antena colocada en su proximidad es la modificación de su diagrama de radiación. Si suponemos que la conductividad no es infinita, el problema se analizaría como un problema de contorno con conductividad finita y cuya solución requerirá un análisis mediante técnicas numéricas como puede ser el Método de los Momentos. El efecto sobre la antena es una disminución de la eficiencia de la antena así como una elevación de los lóbulos en el diagrama de radiación



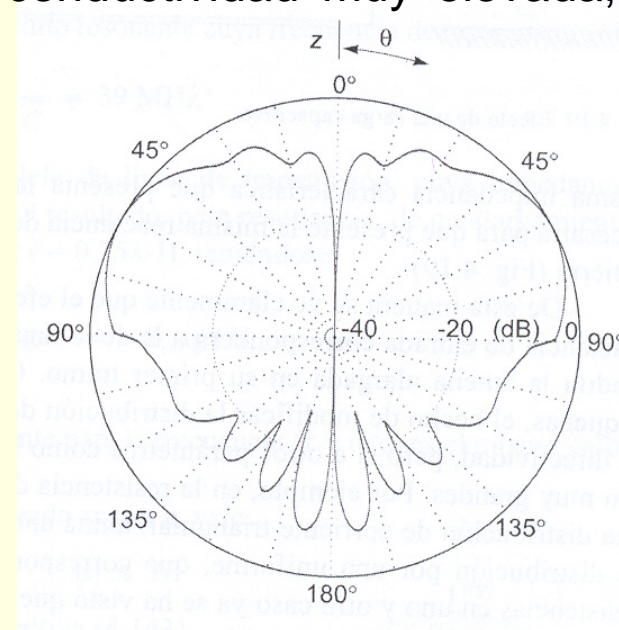
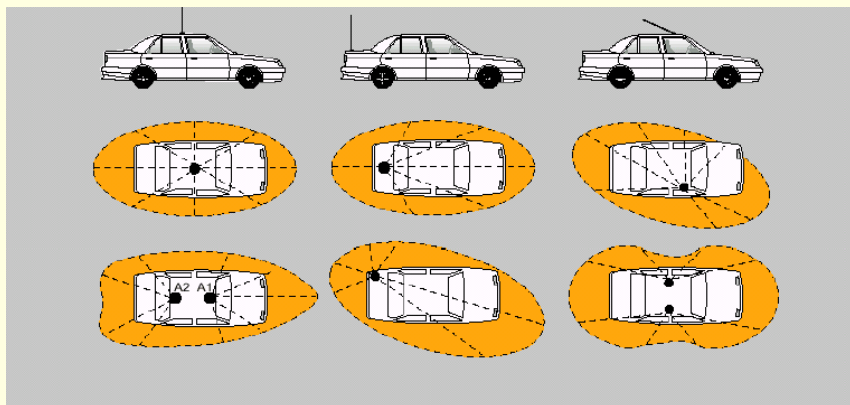
# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

## ✓ Efecto de tierra finita

Algunas veces se montan antenas monopolo sobre planos de masa que no corresponden a tierra sino sobre un conductor perfecto o red de hilos metálicos como ocurre en las antenas montadas sobre vehículos.



En estos casos el plano de tierra, aun supuesto de conductividad muy elevada, las dimensiones del mismo no son infinitas

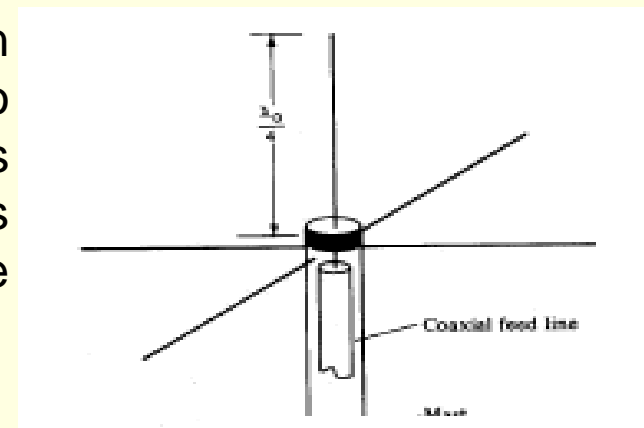


# Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Efectos más notables son:

- a) Variación en la resistencia de radiación disminuyendo para planos de masa relativamente grandes ( $\lambda-2\lambda$ )
- b) Variación del diagrama de radiación y su efecto más notable es que radia debajo del plano de masa tal y como se observa en el diagrama de radiación.

En la práctica, este plano se puede realizar con un conjunto de radiales de longitud  $\lambda/4$ , horizontales o inclinados (tal y como se muestra en la figura) y el análisis detallado de la antena requiere el cálculo de las corrientes en ellos; los campos radiados se obtienen de la suma de los producidos por todas las corrientes.



## 7.- Antenas cargadas

Cuando las antenas trabajan a bajas frecuencias el problema reside en el tamaño de las mismas, por lo que se produce una disminución de la resistencia de radiación y un aumento de la reactancia de entrada (presentando efectos capacitivos). Con respecto a la reactancia puede corregirse haciendo que la antena sea resonante.

## Tema 4.- Antenas lineales y antenas de lazo

Para ello se introducen elementos inductivos o capacitivos en función del tamaño de la misma, esto es, si el tamaño de la antena es  $L < \lambda/2$  la reactancia es capacitiva y hemos de introducir una bobina para cancelar el efecto capacitivo. Una antena de este tipos es



Si el tamaño es  $\lambda/2 < L < \lambda$ , la antena presenta efectos inductivos y hemos de introducir condensadores para hacerla resonante.



Otra solución es introducir un condensador en el extremo de la antena monopolo para acumular carga en el mismo y modificar la distribución de corrientes en la antena evitándose que se anula la distribución de corriente en el extremo de la antena y por tanto que ésta parezca mayor.



# Tema 4.- Antenas Lineales

## 8.- Antenas de lazo

### a) Lazo circular de corriente constante.

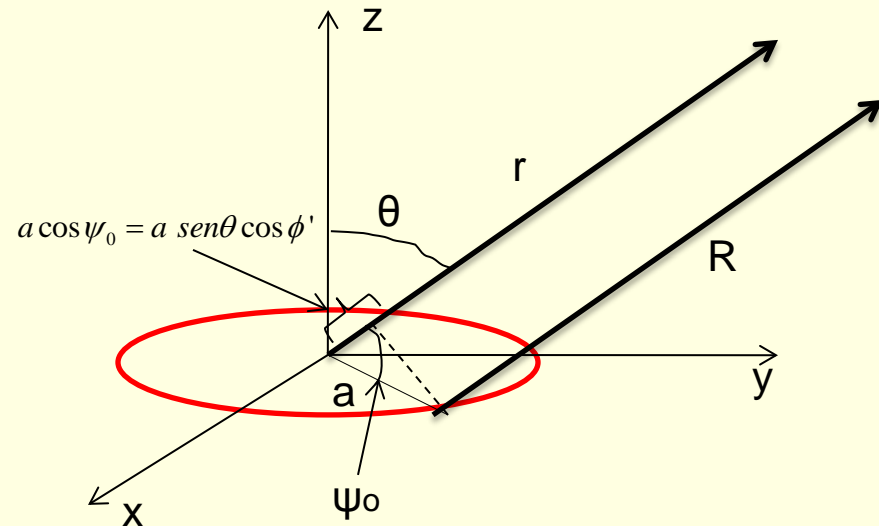
Supongamos una espira de corriente cuyo radio no necesariamente ha de ser pequeño tal y como se muestra en la figura. Haciendo uso de la aproximación de campo lejano en la expresión del potencial vector para módulos y fases, se tiene

$$\left. \begin{aligned} R &\cong r - a \cos \psi_0 \\ R &\cong r \end{aligned} \right\} \text{módulos y fases}$$

El potencial vector queda de la forma

$$A_\phi = \frac{a\mu I_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \cos \phi' e^{jk a \sin \theta \cos \phi'} d\phi' = \frac{a\mu I_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \left[ \int_0^\pi \cos \phi' e^{jk a \sin \theta \cos \phi'} d\phi' - \int_0^\pi \cos \phi'' e^{-jk a \sin \theta \cos \phi''} d\phi'' \right]$$

donde  $\phi' = \phi'' + \pi$ . La integral es de la forma  $\int_0^\pi \cos(n\phi) e^{jz \cos \phi} d\phi = \pi j^n J_n(z)$  por lo que se tiene



## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

$$A_\phi = j \frac{\mu a I_0 e^{-jkr}}{2r} J_1(k a \sin \theta)$$

A partir del potencial vector, los campo de radiación viene dados por

$$H_r = H_\phi = E_r = E_\theta = 0 \quad H_\theta = -\frac{a k I_0 e^{-jkr}}{2r} J_1(k a \sin \theta) \quad E_\phi = \frac{a \eta k I_0 e^{-jkr}}{2r} J_1(k a \sin \theta)$$

La densidad de potencia radiada se calcula a partir de las expresiones de los campos eléctricos y magnéticos lejanos

$$\vec{\phi} = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E} \times \vec{H}^*] = \hat{r} \frac{(a \omega \mu)^2 I_0^2}{8 \eta r^2} J_1^2(k a \sin \theta)$$

La intensidad de radiación será

$$\vec{K}(\theta, \phi) = \frac{(a \omega \mu)^2 I_0^2}{8 \eta} J_1^2(k a \sin \theta) \hat{r}$$

y el diagrama de radiación para diferentes valores del radio

## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Con respecto a la potencia total radiada, ésta vendrá dada por

$$P_r = \iint_S \vec{\rho} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi (a\omega\mu)^2 I_0^2}{4\eta} \int_0^\pi J_1^2(ka \sin\theta) \sin\theta d\theta$$

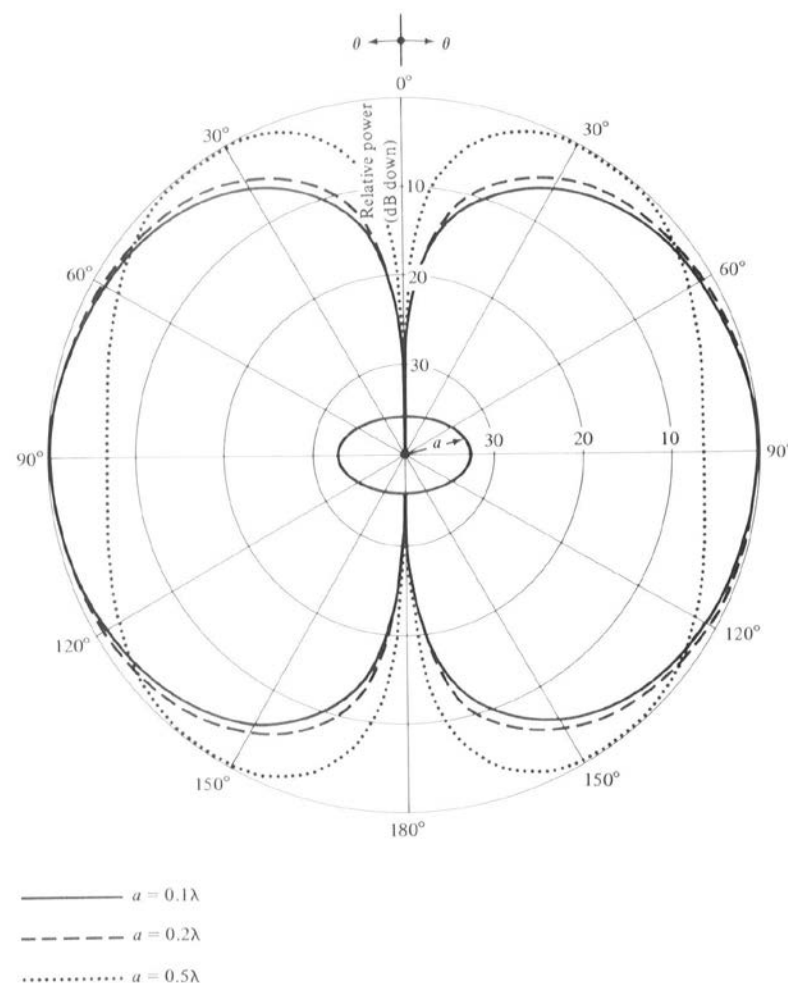
Esta integral no tiene solución exacta, pero puede ser escrita

$$\int_0^\pi J_1^2(ka \sin\theta) \sin\theta d\theta = \frac{1}{ka} \int_0^{2ka} J_2(x) dx$$

Veamos diferentes casos:

a) Aproximación de gran radio ( $a > \lambda/2$ )

$$\int_0^\pi J_1^2(ka \sin\theta) \sin\theta d\theta = \frac{1}{ka} \int_0^{2ka} J_2(x) dx \cong \frac{1}{ka}$$



## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Haciendo uso de esta aproximación, la potencia total radiada puede expresarse como

$$P_r = \iint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} \approx \frac{\pi (a\omega\mu)^2 I_0^2}{4\eta (ka)}$$

y la intensidad de radiación máxima se da cuando la función de Bessel tome un máximo, esto es cuando  $ka \sin\theta$  sea igual a 1.84

$$K_{\max} = \frac{(a\omega\mu)^2 I_0^2}{8\eta} J_1^2(ka \sin\theta) \Big|_{ka \sin\theta=1.84} = \frac{(a\omega\mu)^2 I_0^2}{8\eta} (0.584)^2$$

y la resistencia de radiación 
$$R_{\text{rad}} = \frac{2\pi (a\omega\mu)^2}{4\eta (ka)} = \eta \left( \frac{\pi}{2} \right) ka = 60\pi^2 (ka) = 60\pi^2 \left( \frac{C}{\lambda} \right)$$

con  $C=2\pi a$ .

La directividad y el área efectiva máxima serán

$$D = 4\pi \frac{K_{\max}}{P_{\text{rad}}} = 4\pi \frac{ka (0.584)^2}{2\pi} = 0.682 \left( \frac{C}{\lambda} \right)$$

$$A_{\text{ef max}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D = \frac{\lambda^2}{4\pi} \left[ 0.682 \left( \frac{C}{\lambda} \right) \right] = 5.43 \cdot 10^{-2} \lambda C$$

## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

### b) Aproximación de radio medio ( $\lambda/6\pi < a < \lambda/2$ )

En este caso la aproximación de la integral toma el valor

$$\int_0^\pi J_1^2(ka \sin\theta) \sin\theta d\theta = \frac{1}{ka} \int_0^{2ka} J_2(x) dx \cong \frac{1}{ka} \left[ -2J_1(2ka) + \int_0^{2ka} J_0(y) dy \right]$$

La cual no admite mas aproximaciones, por lo que las características de radiación vendrán dada a partir de este valor

### c) Aproximación de radio pequeño ( $a < \lambda/6\pi$ )

En este caso la función de Bessel puede expandirse en una serie infinita y, para radios pequeños, podemos quedarnos con el primer término de la serie

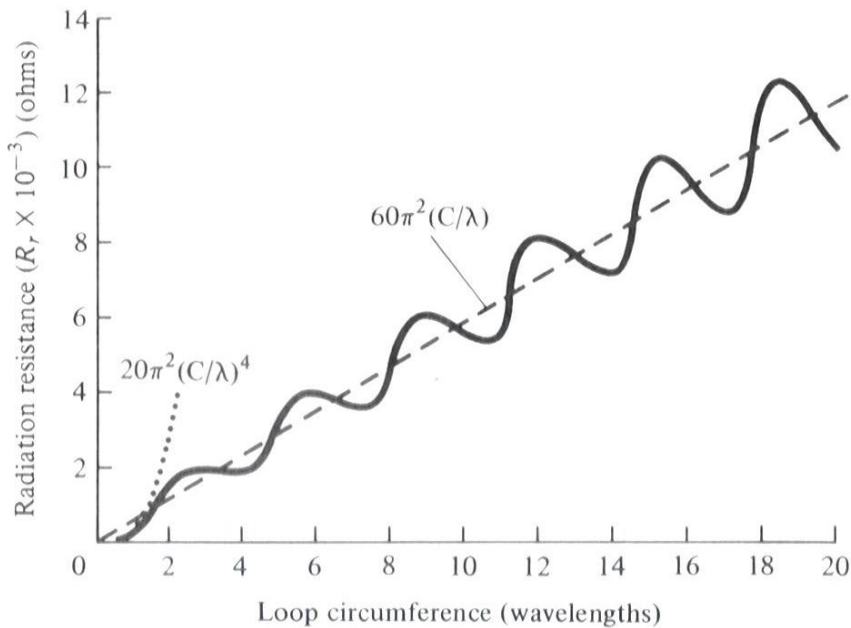
$$J_1(ka \sin\theta) = \frac{1}{2}(ka \sin\theta) - \frac{1}{16}(ka \sin\theta)^3 + \dots \cong \frac{ka \sin\theta}{2}$$

Para este caso, los campos de radiación son

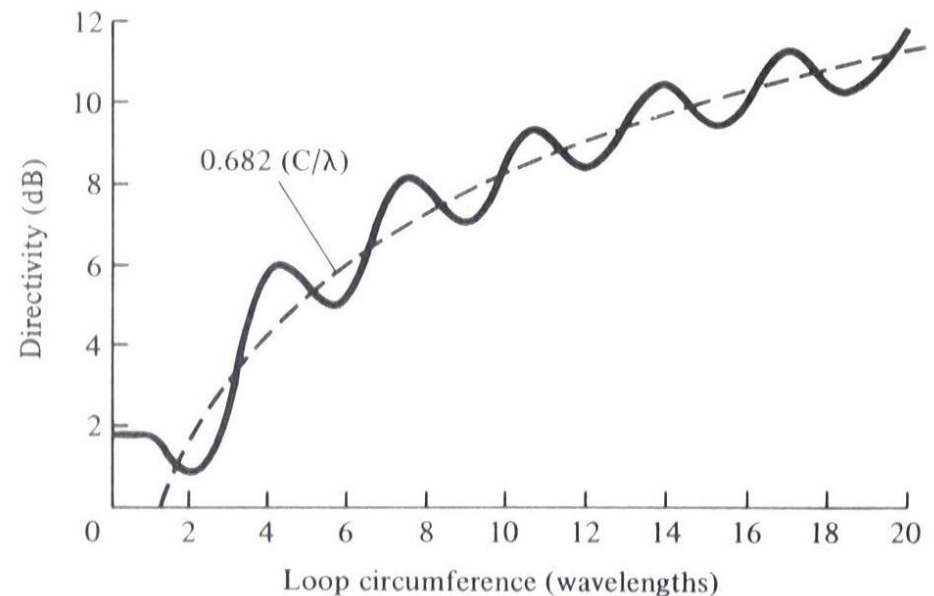
$$H_r = H_\phi = E_r = E_\theta = 0 \quad H_\theta = -\frac{a^2 k^2 I_0 e^{-jkr}}{4r} \sin\theta \quad E_\phi = \frac{a^2 \eta k^2 I_0 e^{-jkr}}{4r} \sin\theta$$

## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Que corresponden a los valores obtenidos para el dipolo magnético elemental. Dado que los campos son los mismos, también lo serán las demás características de radiación, potencial total radiada, resistencia de radiación, etc.



(a) Radiation resistance of circular loop



(b) Directivity of circular loop

# Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

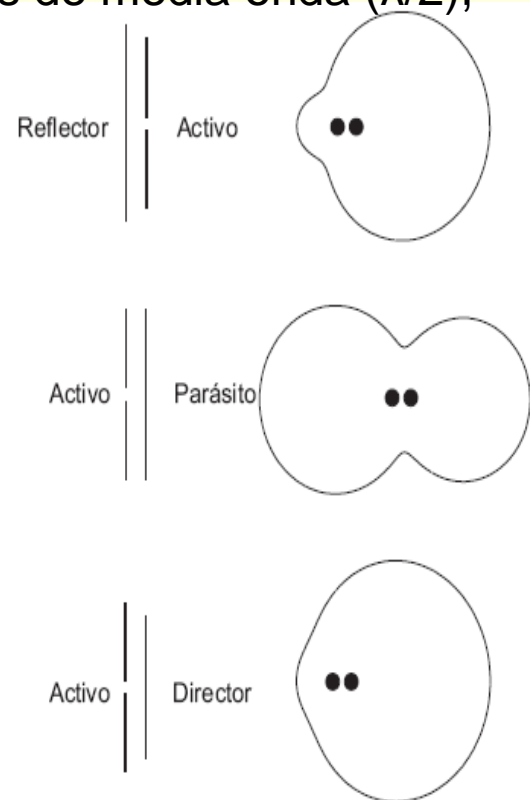
## 9.- Otras antenas lineales.

### a) Antenas Yagi-Uda

Las antenas básicas estudiadas en los apartados anteriores proporcionan grandes anchos de haz y, consecuentemente, valores de directividad reducidos. Ello es debido a que sus dimensiones eléctricas son, como máximo, del orden de la longitud de onda. En aquellas aplicaciones en las que son necesarias directividades elevadas, deben utilizarse antenas de grandes dimensiones eléctricas con distribuciones de corriente lo más uniformes posible. Este problema puede solucionarse con ayuda de una agrupación de antenas (*array*), alimentadas con amplitudes y fases tales que la interferencia de los campos radiados por todas las antenas no proporcione el diagrama de radiación deseado. De todos los elementos que componen una agrupación, es posible alimentar solamente algunos elementos de la agrupación, dejando los demás en cortocircuito. A los elementos con alimentación se les llama “activos”, mientras que los elementos cortocircuitados reciben el nombre de “parásitos”.

## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

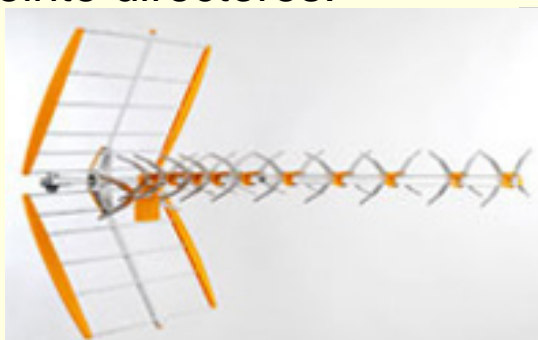
Con un diseño adecuado de los elementos parásitos pueden conseguirse diagramas de radiación de tipo longitudinal bastante directivos, de los que son un ejemplo clásico las antenas de Yagi-Uda. El caso más simple de agrupación con elementos parásitos es el formado por un dipolo activo y uno parásito. Si el dipolo activo es de media onda ( $\lambda/2$ ), pueden obtenerse tres tipos de diagrama de la agrupación según sea la longitud del dipolo parásito ligeramente superior, igual o ligeramente inferior a la del activo. En la figura se muestran los diagramas de campo en plano H para las tres situaciones antes mencionadas, con los siguientes parámetros: en la parte superior de la figura, parásito de longitud  $0,5\lambda$  y activo de  $0,454\lambda$ , con espaciado de  $0,16\lambda$ ; en el centro, activo y parásito de  $0,475\lambda$ , con espaciado de  $0,14\lambda$ ; y en la parte inferior, activo de  $0,482\lambda$  y parásito de  $0,45\lambda$ , con espaciado de  $0,12\lambda$ . Nótese que cuando la longitud de ambos elementos es igual, el diagrama es casi simétrico. Sin embargo, un elemento parásito de longitud ligeramente superior a la del activo produce un máximo en la dirección del activo, por lo que recibe el nombre de “reflector”. Por contra,



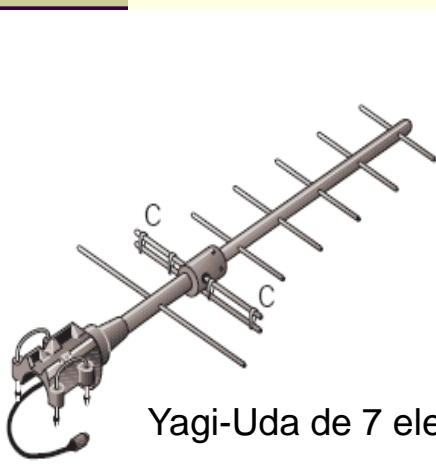
## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

un parásito de longitud ligeramente inferior produce el máximo en la dirección del parásito, por lo que ejerce la función de “director”. Este cambio de comportamiento con la longitud es debido a que el parásito de tamaño inferior al dipolo resonante es de carácter capacitivo, mientras que el de tamaño superior es inductivo.

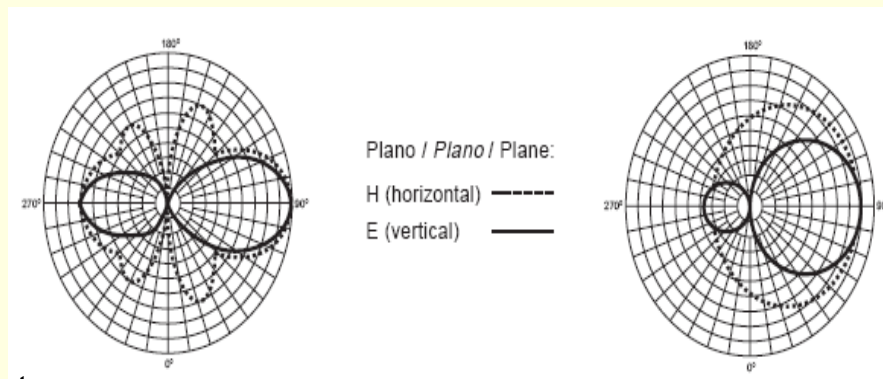
Un tipo de antena muy común en la actualidad es la de Yagi-Uda, inventada en Japón en 1926 por S. Uda y dada a conocer internacionalmente poco después por H. Yagi. Esta antena, conocida como Yagi, cuya característica más significativa es su simplicidad, debida a la utilización de elementos parásitos, se utiliza habitualmente en las bandas de HF, VHF (de 3 a 6 elementos) y UHF (6 a 20 elementos o más) en aplicaciones de radiodifusión de televisión, estaciones de radioaficionados y radioenlaces punto a punto. La configuración más habitual consta de un elemento activo, un reflector y entre uno y veinte directores.



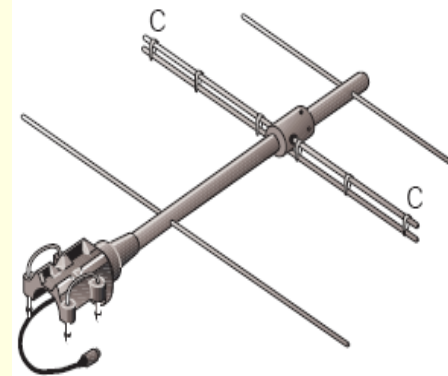
## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo



Yagi-Uda de 7 elementos



Yagi-Uda de 3 elementos

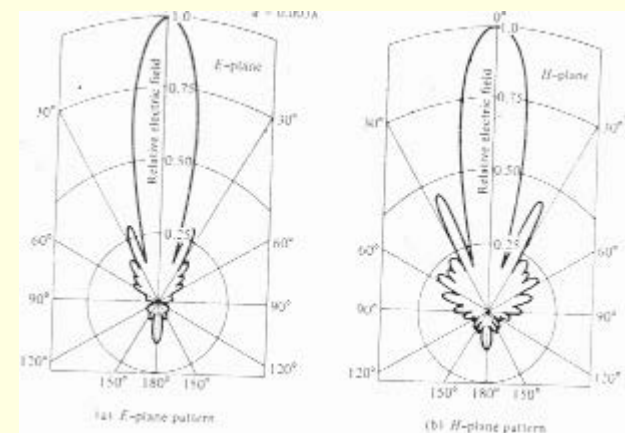
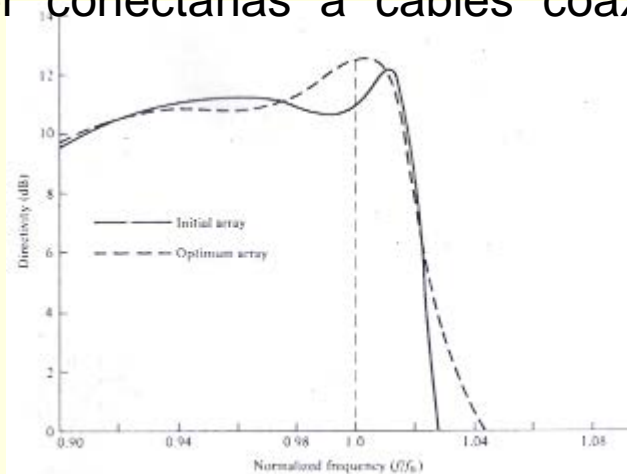


El elemento activo suele ser un dipolo doblado resonante, con objeto de aumentar el ancho de banda. El reflector suele tener una longitud un 5% mayor que la del activo, habitualmente entre  $0,5\lambda$  y  $0,52\lambda$ . La longitud de los directores oscila entre  $0,38\lambda$  y  $0,48\lambda$ , siendo típicamente un 5% o 10 % inferior a la del activo. La separación entre elementos es algo mayor para el reflector (típica  $0,15\lambda$ ) que para los directores (típica  $0,11\lambda$ ). La antena Yagi no es estrictamente una agrupación, por no ser todos sus elementos iguales, pero como los diagramas de radiación de los elementos sí son casi iguales, suelen analizarse con las técnicas de agrupaciones lineales tomando como antena básica el dipolo en  $\lambda/2$ .

## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Las principales características de las antenas de Yagi-Uda son las siguientes:

- Ganancia relativa al dipolo en  $\lambda/2$  entre 5 dBd y 18 dBd.
- Relación delante-atrás entre 5 dB y 15 dB. Este parámetro suele mejorarse con ayuda de un reflector diédrico (véase ejemplos de Yagis en la transparencia anterior).
- Nivel de lóbulo principal a secundario relativamente bajo, entre 5 y 10 dB. Sin embargo, este parámetro no es crítico en las aplicaciones más habituales de estas antenas.
- Impedancia de entrada de unos 300 ohmios, debido a la utilización de un dipolo doblado como elemento activo, por lo que es necesario el uso de transformadores de impedancias para poder conectarlas a cables coaxiales de 50 y 75  $\Omega$  típicos en aplicaciones de TV.



## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

### b) Antena en hélice.

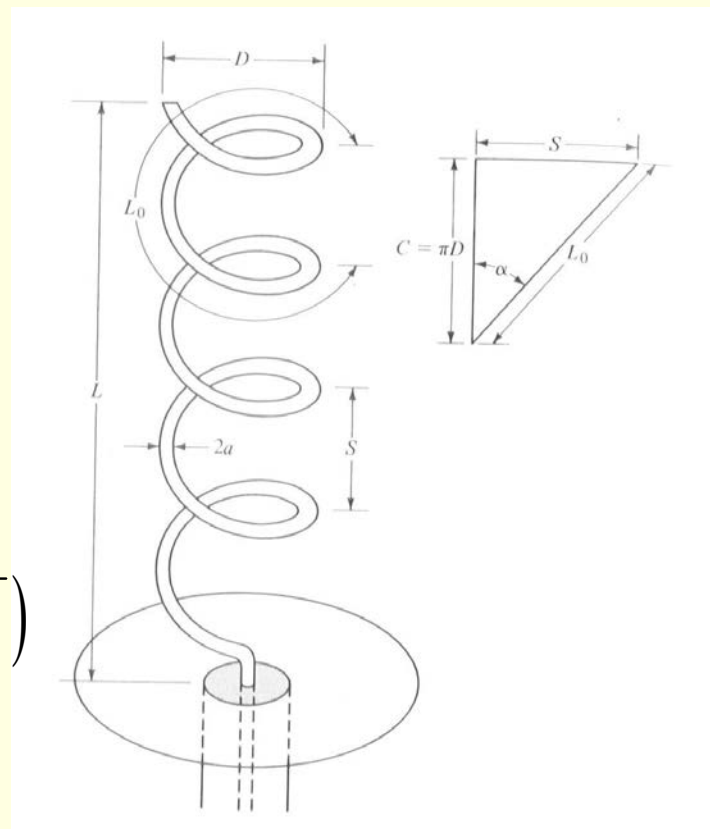
Otra de las antenas básicas construidas con hilos conductores es la denominada antena de hélice tal y como se muestra en la figura.

El plano a tierra suele ser un disco o un cuadrado de dimensiones  $3\lambda/4$  aunque se puede usar otras configuraciones como una cavidad cilíndrica, etc.

Los parámetros geométricos de la antena son:

- N es el número de espiras
- D el diámetro de la espira
- S la distancia entre espiras
- C el perímetro de la espira
- L la longitud de la antena ( $L = N S$ )
- $L_0$  la longitud total del hilo ( $L_{hilo} = N L_0 = N \sqrt{S^2 + (\pi D)^2}$ )
- $\alpha$  ángulo de elevación de la espira

$$\left( \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{S}{\pi D} \right) \right)$$



## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Las características de radiación de la antena dependen de sus características geométricas ya que por ejemplo la impedancia de entrada depende del ángulo de elevación de la espira y del grosor de los mismos. Por la geometría de la antena, la polarización será en general elíptica aunque en algunos casos puede obtenerse polarización lineal o circular.

La antena presenta, básicamente, dos modos de operación en base a sus dimensiones eléctricas, el modo normal o broadside y el modo axial o modo endfire. Este último es el más usado que permite polarización circular sobre un ancho de banda grande y además es el que presenta mayor eficiencia.

### i. Modo normal o broadside

Para obtener el modo de operación normal basta con hacer todas las dimensiones de la antena mucho menores que la longitud de onda de la señal (por ejemplo  $L_{\text{hilo}} \ll \lambda$ ). En este modo los campos de radiación presentan un máximo en el plano normal al eje de la antena y presentan un mínimo en el eje de la antena tal y como se muestra en la figura siguiente

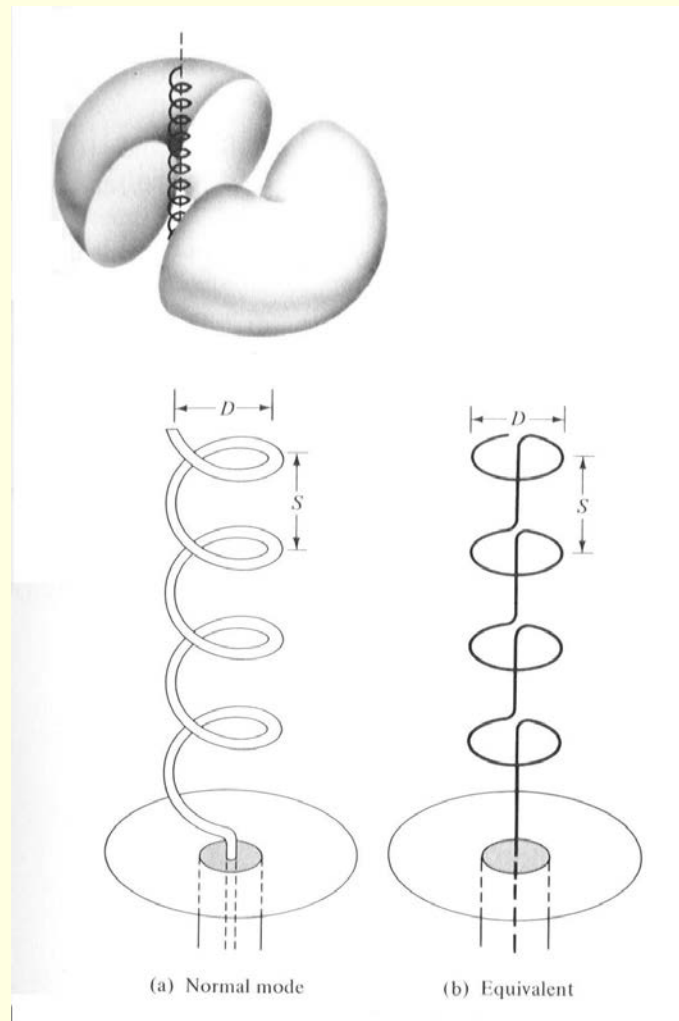
## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Dado que las dimensiones de la antena son muy pequeñas (electromagnéticamente hablando) la antena puede modelarse como un conjunto de  $N$  espiras elementales (dipolos magnéticos elementales) y un conjunto de dipolos eléctricos elementales. Dado que los campos que generan cada uno de estos dispositivos son ortogonales entre sí el campo total producido por la hélice en modo normal será

$$\vec{E} = E_{\theta}\hat{\theta} + E_{\phi}\hat{\phi} = \left( j\eta \frac{kI_0 S e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\theta \right) \hat{\theta} + \left( \eta \frac{k^2 \left( \frac{D}{2} \right)^2 I_0 e^{-jkr}}{4r} \sin\theta \right) \hat{\phi}$$

Para estudiar la polarización de la antena, se define la relación axial como

$$AR = \frac{|E_{\theta}|}{|E_{\phi}|} = \frac{2\lambda S}{(\pi D)^2}$$



## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Como se puede ver, variando las componentes  $D$  y/o  $S$  podemos obtener valores comprendidos entre  $0 \leq AR \leq \infty$ . Por ejemplo, la polarización circular se obtiene cuando  $AR = 1$ , esto es, cuando  $C = \pi D = \sqrt{2\lambda S}$  o bien cuando

$$\tan \alpha = \left( \frac{\pi D}{2\lambda} \right)$$

En este modo la antena presenta una resistencia de radiación muy baja y por tanto su uso se limita a antena en recepción.

### i. Modo axial o endfire

Este es el modo de operación más usado, el cual se obtiene haciendo las dimensiones de la antena aproximadamente igual a una longitud de onda. En este caso los máximos del campo de radiación se encuentran en el eje de la hélice y además de presentar polarización circular en el mismo sentido del arrollamiento de las espiras, presenta características de antena de banda ancha. El diagrama de radiación se puede ver en la figura siguiente.

Esta antena en el modo axial de funcionamiento, presenta ganancias de entre 10 y 17 dBi y su aplicación está en comunicaciones punto a punto y comunicaciones vía satélite

## Tema 4.- Antenas Lineales y antenas de lazo

Ya que al presentar polarización circular no le afecta la rotación de Faraday. Las características de radiación son

$$Z_{ent} = R = 140 \left( \frac{C}{\lambda} \right)$$

$$HPBW = \frac{52\lambda^{\frac{3}{2}}}{C\sqrt{NS}} \text{ (en grados)}$$

$$D = 15N \frac{C^2 S}{\lambda^3} \quad AR = \frac{2N+1}{2N}$$

El campo de radiación normalizado viene dado por

$$E = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2N} \right) \cos \theta \frac{\text{sen} \left[ \left( \frac{N}{2} \right) \Psi \right]}{\text{sen} \left( \frac{\Psi}{2} \right)}$$

Con

$$\Psi = K_0 \left( S \cos \theta - \frac{L_0}{p} \right)$$

$$p = \frac{L_0/\lambda_0}{S/\lambda_0 + 1}$$

validas para  $12^\circ < \alpha < 14^\circ$  ;  $\frac{3}{4} < \frac{C}{\lambda} < \frac{4}{3}$  y  $N > 3$

