

*James Clerk Maxwell*  
(1831-1879)

# Antenas y Propagación

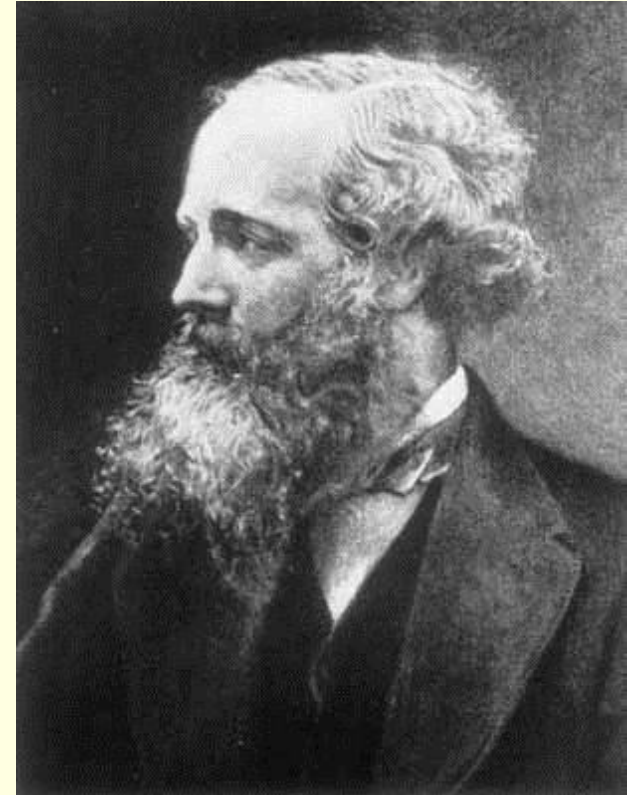
## Tema 1

### Fundamentos Físicos del Fenómeno de la Radiación

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## Índice:

1. Introducción
  - a. Introducción Histórica
  - b. El espectro electromagnético. Bandas de Frecuencia
2. Ecuaciones de Maxwell
3. Funciones potenciales de fuentes eléctricas. Potenciales retardados.
4. Funciones potenciales de fuentes magnéticas. Potenciales retardados.
5. Regiones de Fresnel y Fraunhofer.



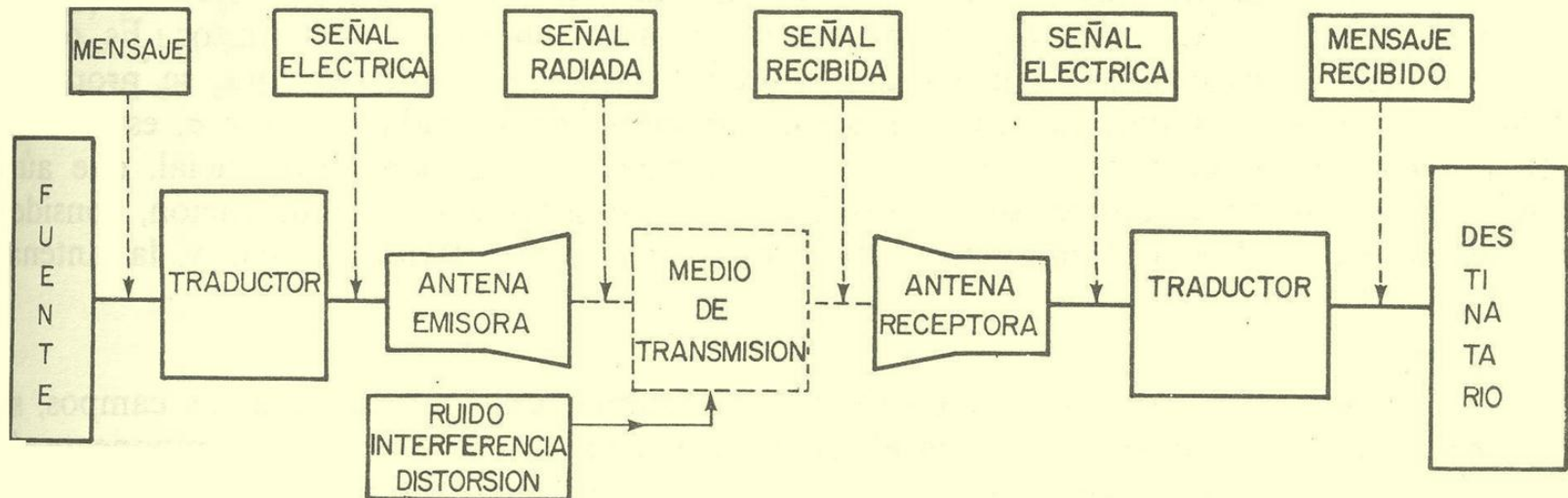
***James Clerk Maxwell  
(1831-1879)***

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## 1.- Introducción

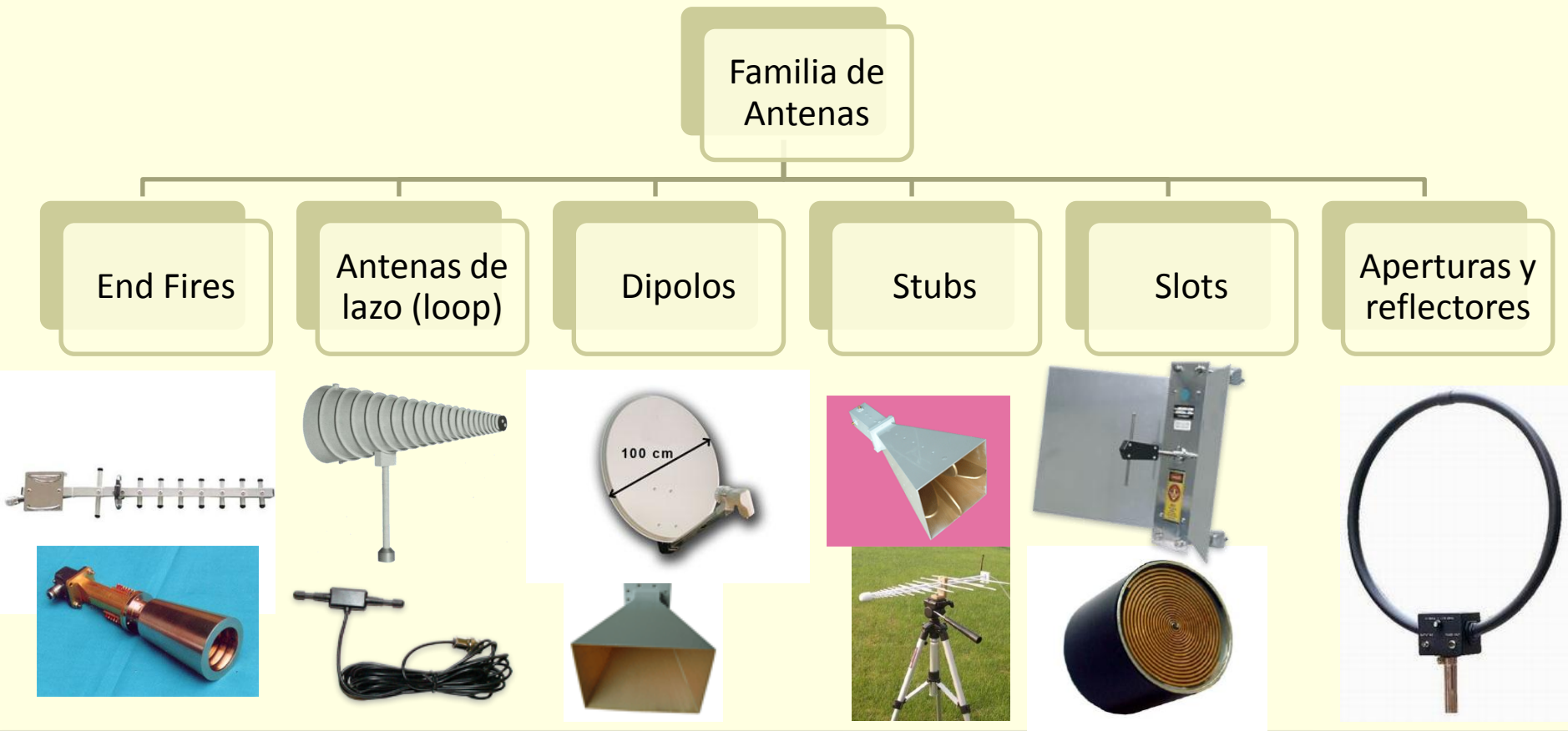
El objetivo de este tema consiste en estudiar la relación entre los campos radiante y sus fuentes, esto es, las cargas y corrientes que los crean.

Desde un punto de vista general, podemos decir que un sistema radiante o una antena es un sistema electromagnético capaz de radiar energía electromagnética de alta frecuencia al espacio libre procedente de un generador



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Las antenas se pueden clasificar de diferentes formas. Una de ellas es por su geometría. En este caso se tiene

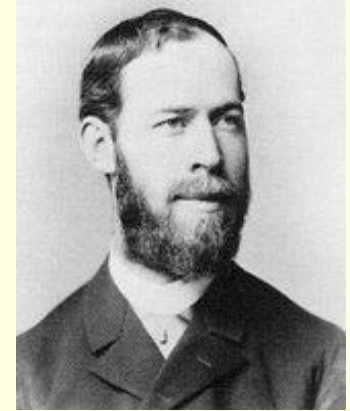


# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## 1.a.- Introducción histórica

La primera antena de radio fue construida por Heinrich Hertz en 1886 como parte de un sistema integral de radio. Se usó una antena transmisora un dipolo con carga en su extremo y como antena receptora una antena de lazo cuadrado resonante. (aunque también realizó experimentos con antenas reflectoras parabólicas).

Aunque Hertz fue el pionero en experimentar con ondas de radio, no fue hasta 20 años después cuando Marconi recogiendo los trabajos de Hertz, implementó circuitos sintonizadores, grandes antenas y grandes longitudes de onda con el fin de conseguir transmitir a grandes distancias. Es en 1901 cuando se produce la primera transmisión intercontinental (se transmitió la letra S desde Poldhu en Cornwall, Inglaterra hasta St. Johns (terranova)). Los trabajos de Marconi abrieron las puertas a inventos como la radiotelefonía, el radar, etc.



Heinrich Rudolf Hertz



Guillermo Marconi

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

La necesidad de mejorar la tecnología radar durante la segunda guerra mundial, propició un gran auge en el diseño de nuevos diseños de antenas cada vez trabajando con longitudes de onda cada vez menores (centimétricas) así hasta nuestro días en los que se trabaja en el diseño de antenas cada vez más pequeñas y de mayor ganancia.

## ¿Cómo radian las antenas?

Antes de proceder al análisis matemático del fenómeno de la radiación, es conveniente dar una explicación básica de los principios de la radiación. El fenómeno de la radiación es una perturbación en los campos electromagnéticos que se propaga desde las fuentes en forma de ondas de tal forma que su potencia total en un medio sin pérdidas es constante.

Esta perturbación es creada por corrientes en las fuentes variables en el tiempo de tal forma que asociadas a ellas se tienen distribuciones de cargas aceleradas (o desaceleradas). Por tanto este fenómeno no aparecerá si no existen movimientos de cargas o éstos son a velocidad constante (excepciones las tenemos en hilos doblados). El fenómeno de la radiación de una antena puede explicarse con la ayuda de la figura siguiente:



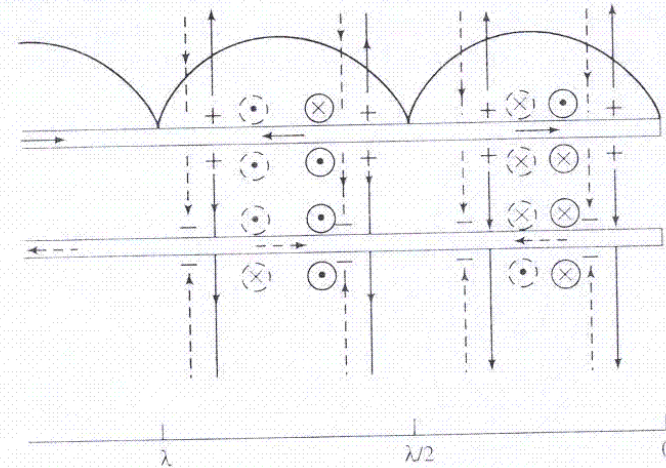
# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

En la figura se muestra una línea de transmisión en circuito abierto. En la figura se puede ver la dirección de la corriente y los campos eléctricos y magnéticos.

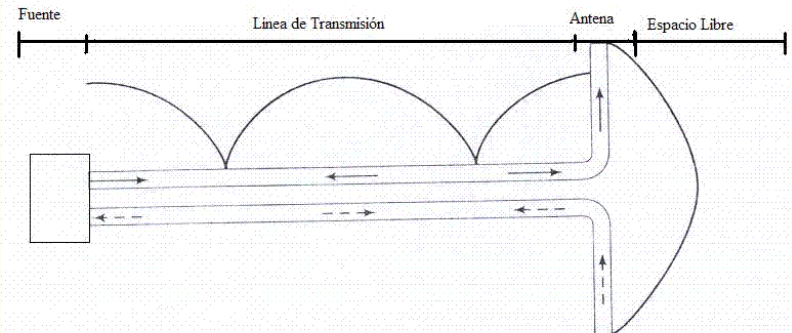
En la figura se representa la onda estacionaria en la que se puede ver que presenta un cero en el extremo final y nulos cada media longitud de onda.

Si los extremos de la línea de transmisión se doblan hacia fuera, se generan hacia el espacio exterior ondas de forma similar a como lo hace una antena dipolo.

En la figura siguiente se representa una simulación de los campos electromagnéticos producidos por una antena dipolo en varios instantes temporales.

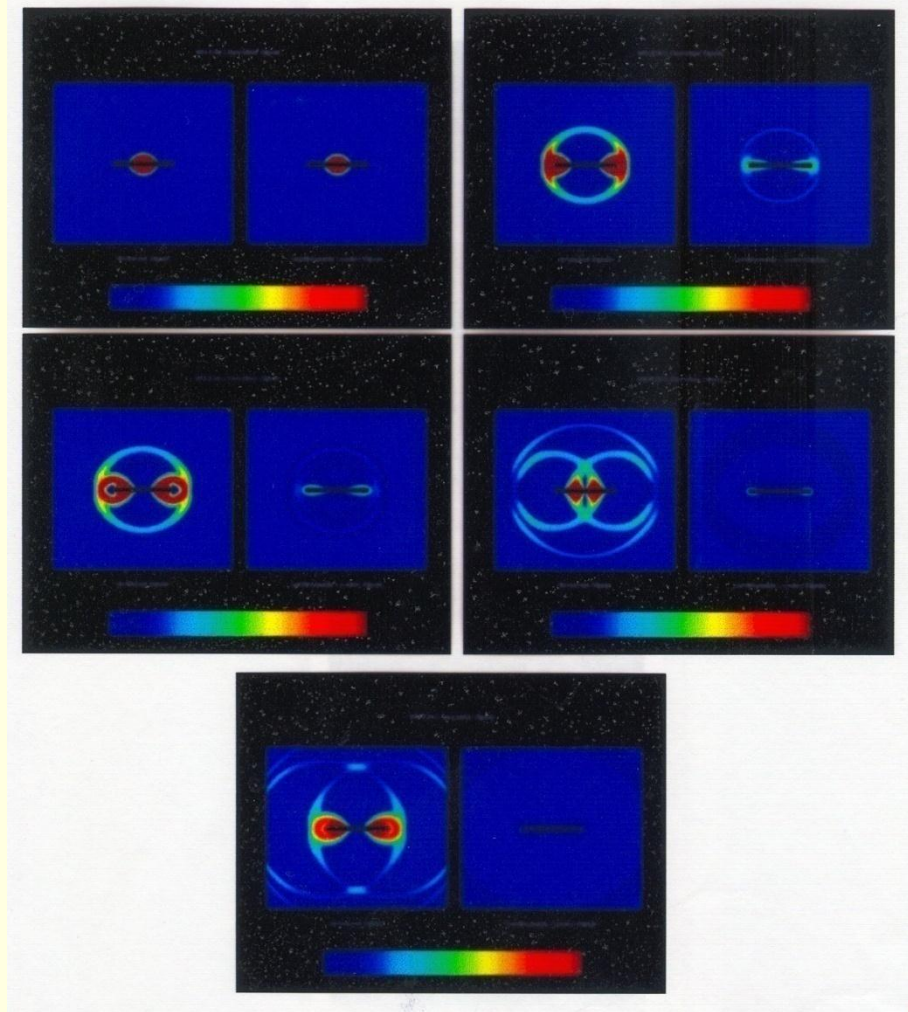


Línea de transmisión en circuito abierto en la que se muestran corrientes, cargas y campos



Evolución de una antena dipolo desde una línea de transmisión en circuito abierto

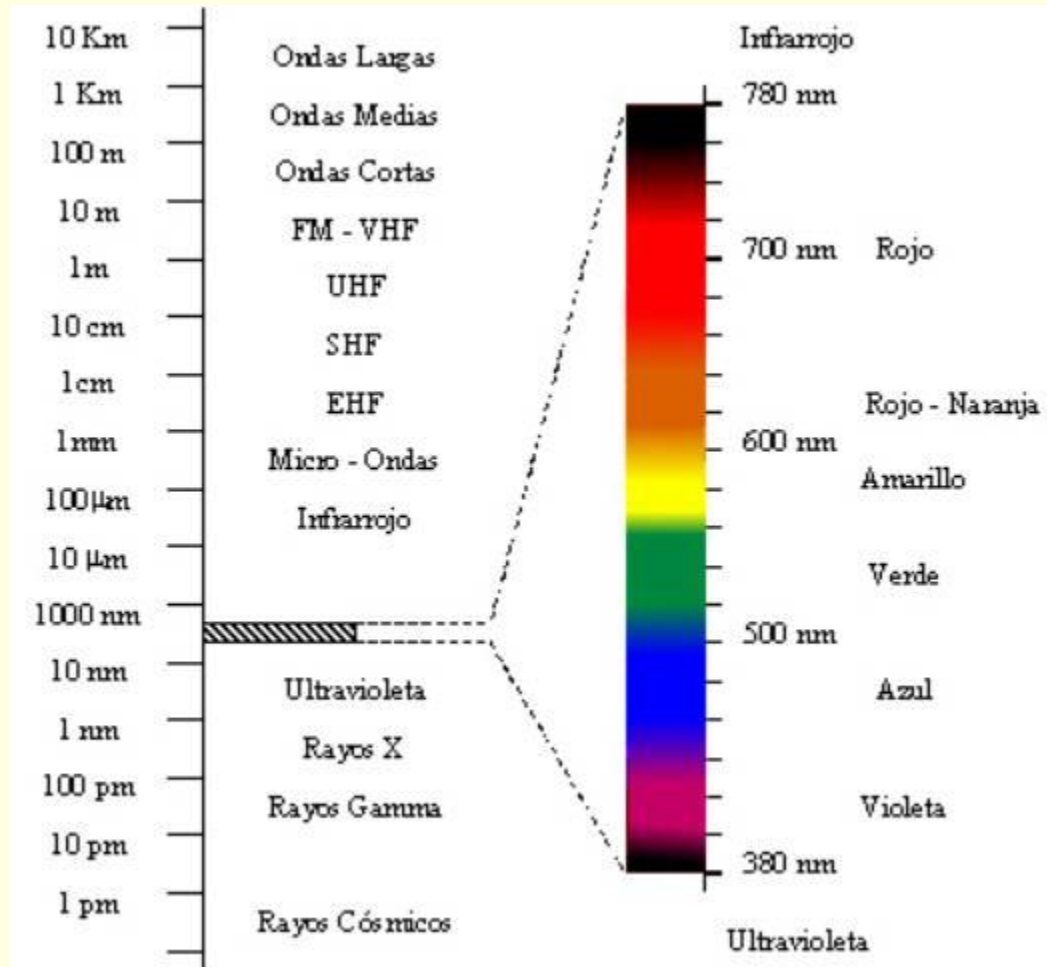
# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación





# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## 1.b.- El espectro electromagnético. Bandas de Frecuencia



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Banda	Designación	Línea de Transmisión	Aplicaciones
3-30 kHz 100-10 km	Very Low Frequency (VLF)	Bifilar	Navegación Sonar
30-300 kHz 10-1 km	Low Frequency (LH)	Bifilar	Radionavegación Radioayudas
300-3000 kHz 1 km-100 m	Medium Freq (MF)	Cable coaxial	Radiodifusión AM y OC
3-30 MHz 100-10 m	High Frequency (HF)	Cable coaxial	Comunicación Barco-costa
30-300 MHz 10-1 m	Very High Freq. (VHF)	Cable coaxial	TV y FM
300-3000 MHz 1m-10 cm	Ultra High Freq (UHF)	Cable coaxial Guía de Ondas	TV, GSM, UMTS
3-30 GHz 10-1 cm	Super High Freq (SHF)	Guía de Ondas	Com. Satélite Radioenlaces
30-300 GHz 10-1 mm	Extreme High Frequency (EHF)	Guía de Ondas	Radar
300-800 GHz	Submilimétrica	Guía de Ondas Fibra óptica	Experimental
800-	Infrarrojo, etc	Fibra óptica	Redes de Comunica.

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

En la banda de microondas, el espectro se subdivide en bandas tal y como se muestra en la tabla

Banda	frecuencia mínima	frecuencia máxima	$\lambda$ máx	$\lambda$ mín
L	1 GHz	2 GHz	30 cm	15 cm
S	2 GHz	4 GHz	15 cm	7.5 cm
C	4 GHz	8 GHz	7.5 cm	3.75 cm
X	8 GHz	12.4 GHz	3.75 cm	2.42 cm
Ku	12.4 GHz	18 GHz	2.42 cm	1.66 cm
K	18 GHz	26.5 GHz	1.66 cm	1.11 cm
Ka	26.5 GHz	40 GHz	11.1 mm	7.5 mm
Mm	40 GHz	300 GHz	7.5 mm	1 mm

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## 2.- Ecuaciones de Maxwell

Asumiendo variaciones temporales en los campos electromagnéticos, las fuentes escalares y vectoriales de los mismos vienen dadas por:

Ecuación	Forma Diferencial	Forma Integral
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$
No existencia de carga magnética	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Ley de Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Ley de Ampère	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$

ecuaciones conocidas por **ecuaciones de Maxwell**.

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

A estas ecuaciones hay que sumarle las ecuaciones constitutivas del medio que nos describen el comportamiento de los campos en el interior del mismo.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

Además podemos añadir una ecuación más en la que se describe la fuerza que se ejerce sobre los electrones cuando éstos están inmersos en campos **E** y **B**

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Un campo vectorial que varía con las coordenadas espaciales y es una función sinusoidal del tiempo, puede ser representada por un vector fasor que depende de las coordenadas espaciales pero no del tiempo (de forma explícita), esto es,

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \Re e \left[ \vec{E}(x, y, z) e^{j\omega t} \right] \quad \vec{H}(x, y, z, t) = \Re e \left[ \vec{H}(x, y, z) e^{j\omega t} \right]$$

Donde **E** (x,y,z) es el correspondiente fasor el cual contiene información de la dirección, magnitud y fase del vector campo eléctrico.



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Dado que los fasores son en general complejos, se tiene que

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}(x, y, z, t)}{\partial t} &\Rightarrow j\omega \vec{E}(x, y, z) \\ \int \vec{E}(x, y, z, t) dt &\Rightarrow \frac{\vec{E}(x, y, z)}{j\omega} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon} & \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Que corresponden a las ecuaciones de Maxwell en términos fasoriales.

Por último los valores de  $\varepsilon, \mu$  pueden ser reales o complejos, constantes o variables con la posición y esto da lugar a diferentes tipos de medios

En el estudio de antenas, los medios serán lineales, homogéneos e isotrópicos, por lo que las constantes serán reales y constantes

Tipo de medio	$\varepsilon, \mu$
Sin pérdidas	Reales
Con pérdidas	Complejos
Isótropo	Escalares
Anisótropo	Matriciales
Homogéneo	Constantes
Inhomogéneos	Variables

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Como es sabido una OEM transporta energía electromagnética. Veamos pues la relación que existe entre la energía y el propio campo electromagnético. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{aplicando} \\ \text{la relación} \\ \text{vectorial} \end{array} \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$
$$\Rightarrow \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

Integrando sobre todo un volumen y aplicando el teorema de la divergencia al primer miembro de la ecuación se tiene,

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Veamos cada término:

- ✓ El primer término de lado derecho de la ecuación representa la razón de cambio temporal de la energía almacenada en los campos eléctricos y magnéticos.
- ✓ El segundo término del lado derecho representa la potencia óhmica disipada en el volumen
- ✓ El término del lado izquierdo representa la potencia que sale del volumen a través de la superficie S.

Al producto vectorial de los campos, que representa un flujo de potencia por unidad de superficie, se define como vector de Poynting ( $\mathbf{S}$ ) y a la ecuación que lo define, teorema de Poynting

$$-\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) dV + \int_V P_\sigma dV$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Donde  $w_e$  y  $w_m$  corresponden a las densidades de energía eléctrica y magnética respectivamente.

En el caso de variaciones armónicas en los campos, podemos definir el vector de Poynting complejo como  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$  en el que la parte real del vector de Poynting complejo coincide con la densidad de potencia media radiada, esto es,

$$\vec{\phi} = \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}$$

La potencia total radiada será  $P_r = \oint \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \cdot d\vec{S}$

A la hora de resolver problemas electromagnéticos envolviendo regiones con diferentes parámetros constitutivos es necesario conocer las condiciones que han de cumplir los campos electromagnéticos (y sus vectores auxiliares) en la frontera de separación entre ambas regiones.

Estas condiciones se obtienen aplicando las ecuaciones de Maxwell en su forma integral (debido a que se aplican sobre superficies y contornos) y se demuestra que:

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

1. La componente tangencial del campo E son continuas a través de la interface.
2. La componente tangencial del campo H es discontinua en la interface si en esta existen densidades superficiales de corriente.
3. La componente normal del vector desplazamiento D son discontinuas si en la interface existen densidades superficiales de carga
4. La componente normal del campo B son siempre continuas

$$\begin{aligned}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} &= 0 & (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} &= \sigma \\ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} &= \vec{J}_s & (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} &= 0\end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos interesantes:

✓ **Interface entre dos medios sin pérdidas.**

Un medio sin pérdidas es aquel que viene caracterizado por una permitividad  $\epsilon$  y una permeabilidad  $\mu$  con conductividad  $\sigma=0$  (no confundir con la densidad de carga superficial). Además es usual en este tipo de interfases que no existan carga ni corrientes por los que las condiciones de contorno se reducen a



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

$$\begin{aligned}E_{1t} = E_{2t} &\Rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\H_{1t} = H_{2t} &\Rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \\D_{1n} = D_{2n} &\Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \\B_{1n} = B_{2n} &\Rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}\end{aligned}$$

✓ Interface entre un dieléctrico y un conductor perfecto.

Un conductor perfecto es un material en el que la conductividad es infinita. Debido a esto el campo eléctrico en el interior del mismo se hace cero y según la ley de Gauss no es posible la acumulación de cargas en su interior (de existir estará en su superficie).

En estas condiciones las ecuaciones en la frontera se reducen a

<i>Dieléctrico</i>		<i>Conductor</i>
$E_{1t} = 0$	$\Rightarrow$	$E_{2t} = 0$
$\hat{n} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s$	$\Rightarrow$	$H_{2t} = 0$
$\hat{n} \cdot \vec{D}_1 = \sigma$	$\Rightarrow$	$D_{2n} = 0$
$B_{1n} = 0$	$\Rightarrow$	$B_{2n} = 0$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## 3.- Funciones potenciales de fuentes eléctricas. Potenciales retardados

Dado que  $\vec{B}$  es solenoidal siempre es posible encontrar una función potencial tal que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

que sustituyéndola en la Ley de Faraday se tiene

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \exists V / \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

Expresión que nos permite relacionar los campos con sus funciones potenciales

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

con:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{R} dV', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV', \quad \text{con } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Por otra parte, substituyendo las ecuaciones que relacionan los campos y los potenciales en la ley de Ampere y en la ley de Gauss, respectivamente (junto con las ecuaciones constitutivas)

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \qquad \nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

donde se hace uso del contraste de Lorentz.

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Estas ecuaciones corresponde a las ecuaciones de ondas inhomogéneas para el potencial vector y potencial escalar, respectivamente.

Como sabemos las ecuaciones de Maxwell dan una descripción completa de la relación entre los campo electromagnéticos y las distribuciones de carga y corriente. Su solución provee todas las respuestas a cualquier problema electromagnético pero esto no significa que su solución sea fácil de encontrar.

La solución a un problema electromagnético pasa por resolver primero la ecuación de ondas no homogénea tanto, por ejemplo, para el potencial escalar como para el potencial vector y en segundo lugar, a partir de estas soluciones se obtienen los campos **E** y **B** respectivamente

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Consideremos, sin pérdida de generalidad, una carga puntual elemental  $\rho(t)\Delta V$  localizada en el origen de coordenadas. Debido a la simetría esférica de la carga, el potencial  $V$  sólo podrá depender de la componente radial y del tiempo y exceptuando el origen,  $V$  satisface la ecuación de ondas

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

esto es,

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

Introduciendo el cambio de variable  $V(R,t)=U(R,t)/R$  la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial R^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial t^2} = 0$$

que corresponde a una ecuación de onda monodimensional cuya solución es una función de la forma  $f(t \pm R\sqrt{\mu\epsilon})$ . La solución positiva veremos posteriormente que no posee realidad física.

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Deshaciendo el cambio se tiene para el potencial escalar  $V(R, t) = \frac{1}{R} f(t - R/u)$  donde  $u$  es la velocidad de propagación. Veamos que forma ha de tener dicha función  $f$ . Recordando que una carga en situación estática y colocada en el origen, produce un potencial de la forma

$$V(R, t) = \frac{\rho(r', t) \Delta V'}{4\pi\epsilon R}$$

y comparando, se tiene

$$f\left(t - \frac{R}{u}\right) = \frac{\rho\left(r', t - \frac{R}{u}\right) \Delta V'}{4\pi\epsilon}$$

Si en vez de una carga puntual elemental se tiene una distribución continua de carga, basta sumar todas las infinitas contribuciones de todas las cargas elementales contenidas en dicho volumen para obtener el potencial escalar producido por esta distribución, esto es,

$$V(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \frac{\rho\left(r', t - \frac{R}{u}\right)}{R} dv'$$



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Hay que hacer notar en esta expresión que el potencial escalar a una distancia  $r$  y un instante de tiempo dado  $t$  depende de la carga en el tiempo retardado  $t' = t - R/u$ . Es por esta razón por lo que hemos descartado la solución positiva ya que implicaría tener efectos sin causas.

Del mismo modo procederíamos con la ecuación de ondas para el potencial vector, obteniéndose así la expresión del potencial vector retardado

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}\left(r', t - \frac{R}{u}\right)}{R} dv'$$

Si los campos presentan variaciones armónicas, las soluciones de las ecuaciones de ondas para los potenciales pasan a ser donde  $k$  es el número de ondas que se expresa en función de la frecuencia como

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi f}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re e \left[ e^{j\omega t} \int_V \frac{\mu \vec{J}(\vec{r}') e^{-jkR}}{4\pi R} dV' \right]$$

$$V(\vec{r}, t) = \Re e \left[ e^{j\omega t} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') e^{-jkR}}{4\pi\epsilon R} dV' \right]$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

o en términos fasoriales

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho e^{-jkR}}{R} dV', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} e^{-jkR}}{R} dV'$$

que corresponden a los potenciales retardados escalares y vectoriales respectivamente.

Al término  $\frac{e^{-jkR}}{R}$  se le conoce como función de Green y corresponde a una onda esférica producida por un impulso de densidad volumétrica en un medio homogéneo.

Una vez conocido los potenciales, podemos obtener las expresiones de los campos

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \left( jk + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} \hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}') dV'$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \left[ \left( jk + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} \rho(\vec{r}') \hat{R} - j\omega\mu\epsilon \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} \right] dV'$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

En estas expresiones podemos ver que existen términos que decaen como  $1/R$  y como  $1/R^2$  por lo que podemos expresarlos como suma de dos términos, un primer término denominado campos cercanos y un segundo término denominado campos lejanos y toman la forma general.

## Campos cercanos o inducidos

$$\vec{E}^i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \rho(\vec{r}') \frac{e^{-jkR}}{R^2} \hat{R} dv'$$

$$\vec{H}^i = -\frac{1}{4\pi} \int_{v'} \left[ \hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R^2} dv'$$

## Campos lejanos o de radiación

$$\vec{E}^r = \frac{jk}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \left[ \rho(\vec{r}') \hat{R} - \sqrt{\mu\epsilon} \vec{J}(\vec{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dv'$$

$$\vec{H}^r = -\frac{jk}{4\pi} \int_{v'} \left[ \hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dv'$$

En general estos campos inducidos, que están en cuadratura con los campos radiados, "viven" en las proximidades de las antenas y son los responsables de la parte reactiva de la impedancia de entrada de la antena.

Una parte muy importante en el estudio de las antenas es el conocimiento y análisis de los campos a grandes distancias de los focos emisores. Dado que los campos inducidos son prácticamente cero a grandes distancias, este análisis se restringirá al estudio de los campos de radiación.

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## ✓ Polarización de ondas electromagnéticas

Denominamos polarización de ondas electromagnéticas a la figura geométrica que describe en el tiempo un vector campo eléctrico o magnético.

Para ondas planas uniformes, el campo eléctrico (magnético) está confinado en planos perpendiculares a la dirección de propagación de tal forma que la polarización de la onda necesariamente describe figuras en dicho plano. Para ondas no uniformes, se puede tener componentes en la dirección de propagación y en otros casos la onda se separa en dos componentes, una componente perpendicular y otra tangente a la dirección de propagación permitiendo por tanto realizar un estudio de cada onda por separado.

Veamos los tipos más usuales de polarizaciones:

### ○ Polarización lineal

Una onda plana propagándose en la dirección, por ejemplo, en la dirección del eje  $z$  presenta polarización lineal si el campo eléctrico presenta una sola componente ( $E_x$  o  $E_y$ ) o cuando sus dos componentes transversales ( $E_x$  y  $E_y$ ) están en fase.

Supongamos que:

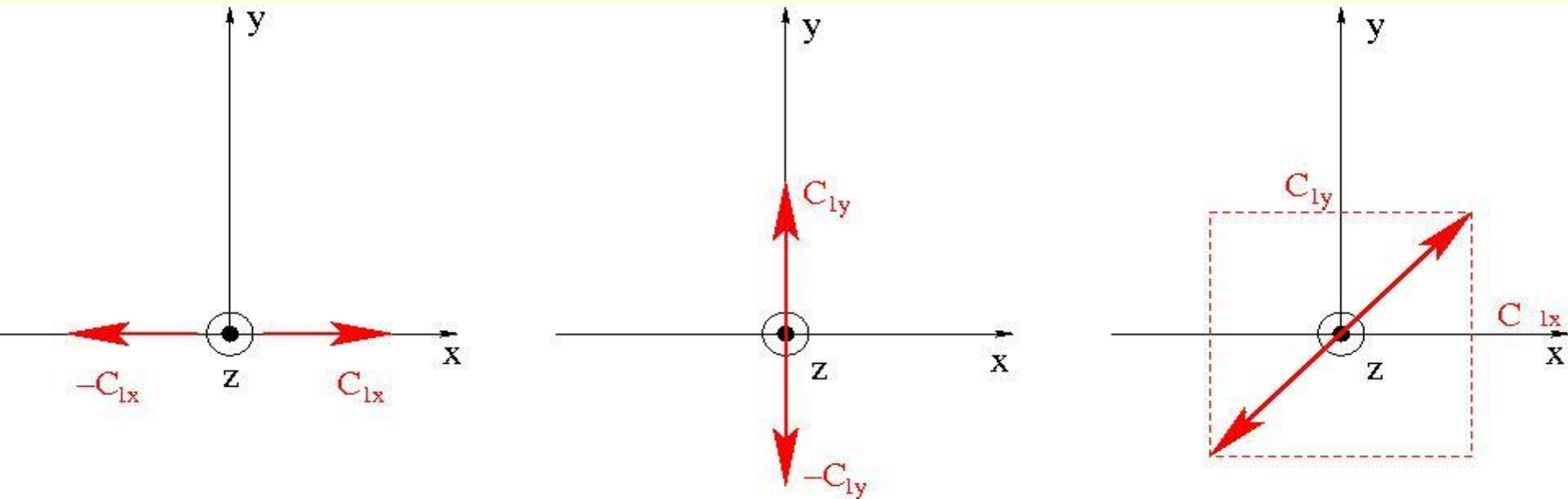
# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

$$E_x(z,t) = C_{1x} \cos(\omega t - \beta z + \zeta)$$

$$E_y(z,t) = C_{1y} \cos(\omega t - \beta z + \zeta)$$

Con  $C_{1x}$  y  $C_{1y}$  constantes.

Ambas componentes del campo eléctrico representan ondas polarizadas linealmente. La orientación del vector campo eléctrico dependerá de los coeficientes constantes  $C$  y se pueden dar las siguientes configuraciones





# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## ○ Polarización circular

Una onda plana uniforme está circularmente polarizada cuando sus dos componentes están desfasas  $90^\circ$  y sus amplitudes son iguales, esto es,

$$E_x(z, t) = C_1 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_y(z, t) = C_1 \cos\left(\omega t - \beta z \pm \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Con } C_1 \text{ una constante.}$$

En este caso, la figura geométrica que describe el extremo del campo eléctrico (magnético) es un círculo. El sentido en el que se describa este círculo puede ser en sentido de las agujas del reloj y en este caso se dice que está polarizada circularmente a izquierdas o en sentido antihorario y en este caso se dice que está polarizada a derechas.

También se suele denotar con las siglas LHCP (left-hand circularly polarized) o por las siglas RHCP (Right-hand circularly polarized).

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

De la ecuación anterior, para esta polarización en modo RHCP y en  $z=0$  se tiene

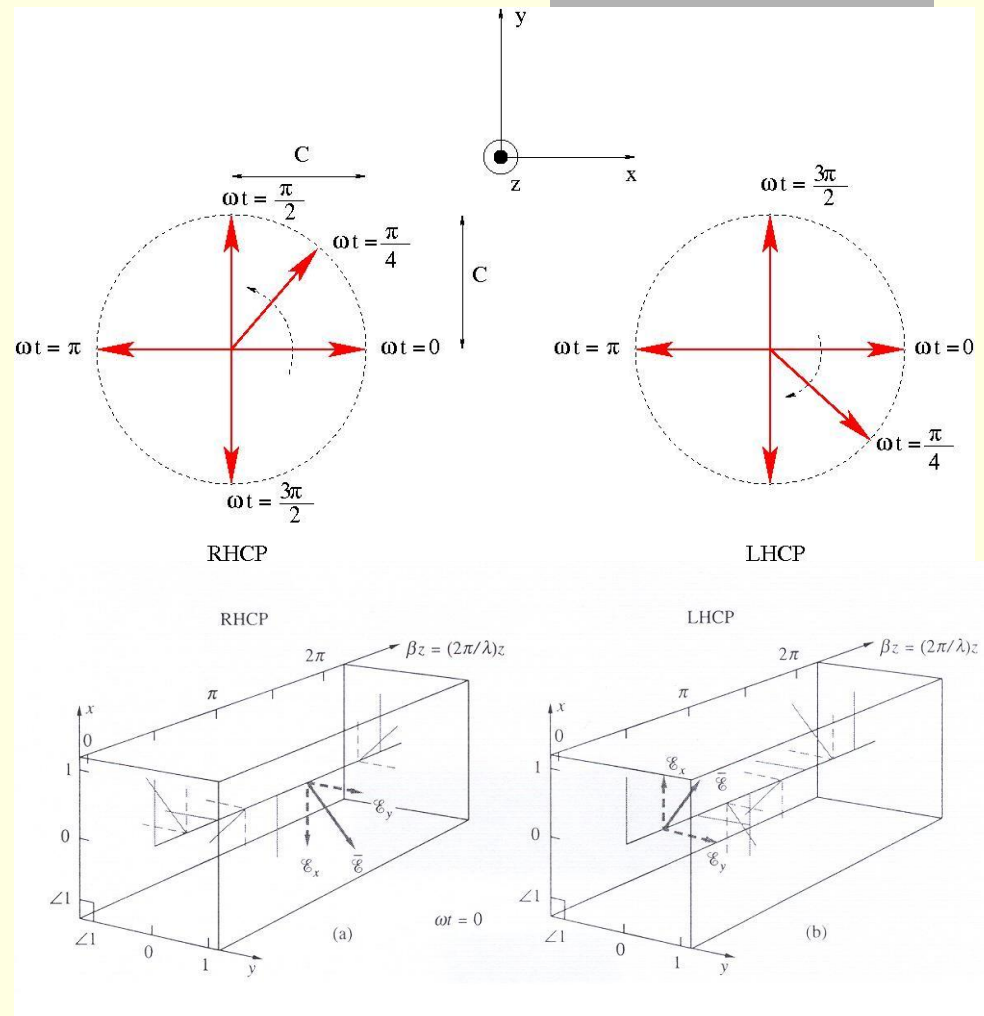
$$E_x(z=0, t) = C_1 \cos(\omega t)$$

$$E_y(z=0, t) = C_1 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = C_1 \sin(\omega t)$$

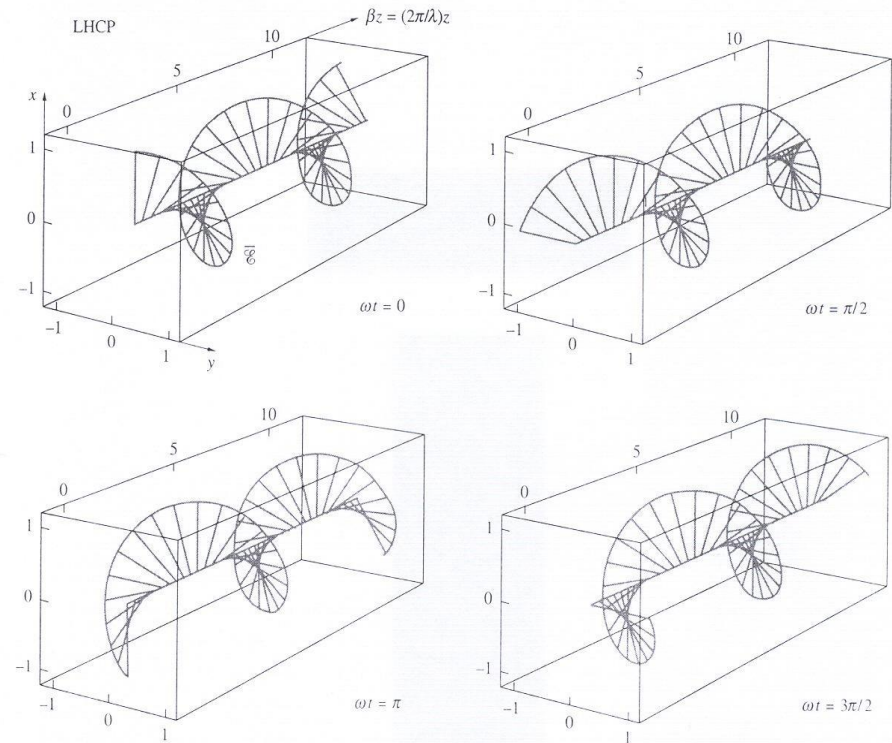
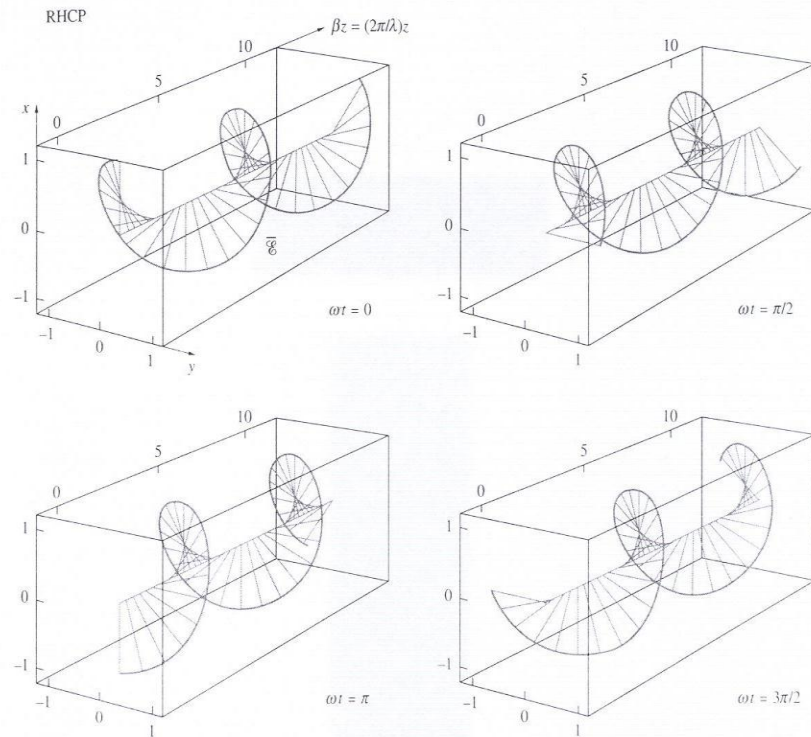
La amplitud del campo eléctrico será

$$|E|^2 = E_x^2 + E_y^2 = C_1^2$$

que corresponde a la ecuación de una circunferencia. Para el caso de una onda polarizada circularmente y desplazándose en el eje  $z$ , la situación se muestra en las figuras adjuntas.



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

En el dominio de la frecuencia, las componentes del campo para cada una de las polarizaciones será

RHCP

$$\left. \begin{aligned} E_x(z) &= C_1 e^{-j\beta z} \\ E_y(z) &= C_1 e^{-j\beta z} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jC_1 e^{-j\beta z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}(z) = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = C_1 e^{-j\beta z} \hat{i} - jC_1 e^{-j\beta z} \hat{j} = C_1 e^{-j\beta z} (\hat{i} - j\hat{j})$$

LHCP

$$\left. \begin{aligned} E_x(z) &= C_1 e^{-j\beta z} \\ E_y(z) &= C_1 e^{-j\beta z} e^{+j\frac{\pi}{2}} = jC_1 e^{-j\beta z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}(z) = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = C_1 e^{-j\beta z} \hat{i} + jC_1 e^{-j\beta z} \hat{j} = C_1 e^{-j\beta z} (\hat{i} + j\hat{j})$$

## ○ Polarización elíptica

Es el caso más general y ocurre cuando las componentes de  $E_x$  y  $E_y$  tienen amplitudes diferentes o si la diferencia de fase entre ellas es distinta de  $90^\circ$ . Las expresiones para las componentes del campo eléctrico en el dominio del tiempo será

$$E_x(z, t) = C_{1x} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_y(z, t) = C_{1y} \cos(\omega t - \beta z + \zeta)$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

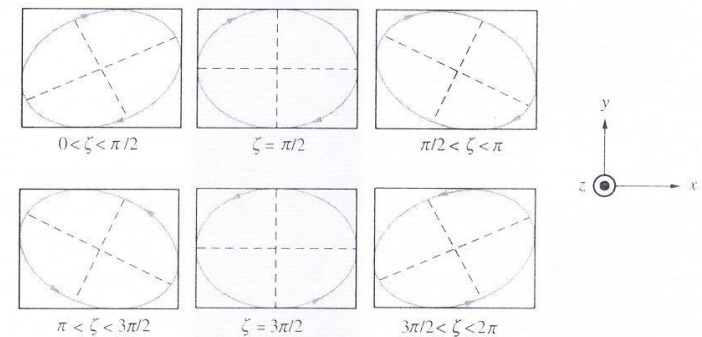
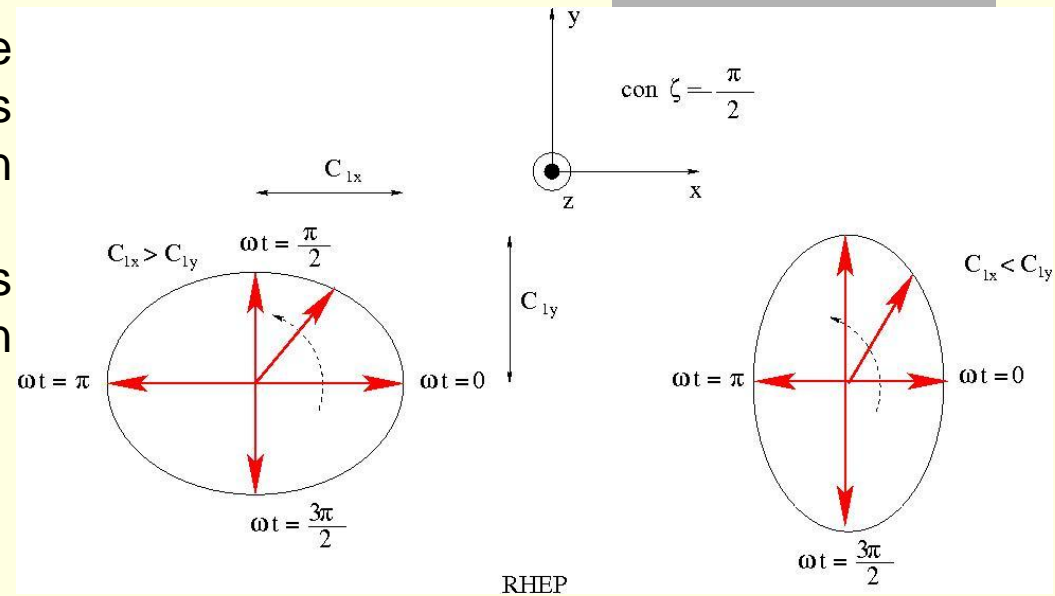
En la figura se representa un desfase de  $-90^\circ$  pero con amplitudes diferentes y en la figura siguiente se representan diferentes valores de  $\zeta$ .

En el dominio de la frecuencia, las componentes transversales pueden escribirse en forma fasorial como

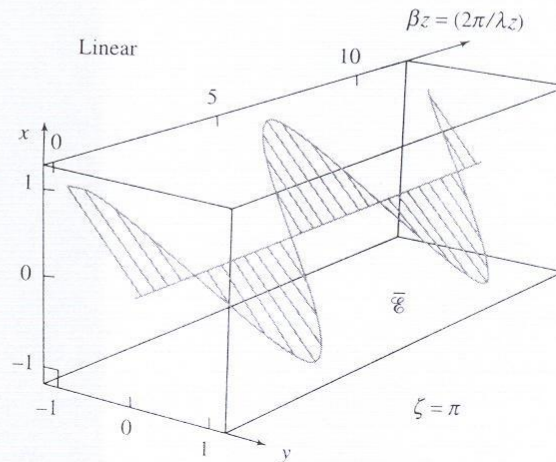
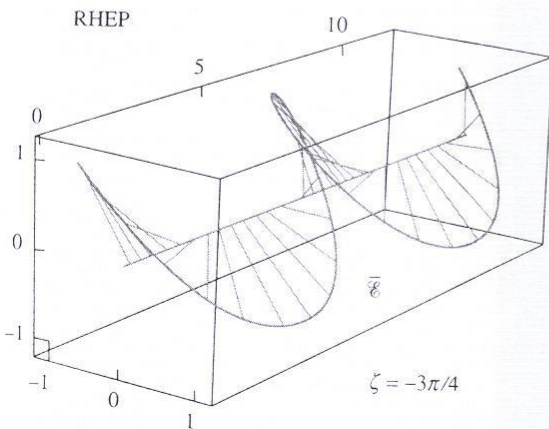
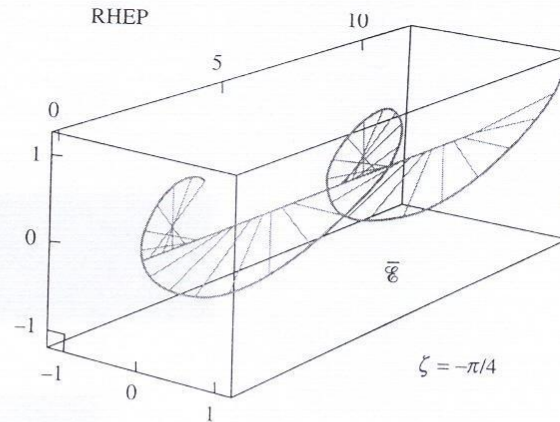
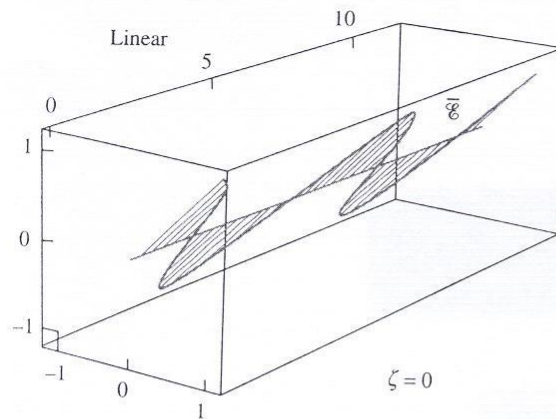
$$\left. \begin{aligned} E_x(z) &= C_{1x} e^{-j\beta z} \\ E_y(z) &= C_{1y} e^{-j\beta z} e^{+j\zeta} \end{aligned} \right\}$$

donde  $\zeta = \pm\pi/2$  y el signo + representa una LHEP y el signo - representa una RHEP.

En el caso de que las magnitudes sean iguales, la onda está polarizada elípticamente si  $0 < \zeta < 90^\circ$ . La representación cuando se tiene desplazamiento en el eje z y presenta diferentes valores de  $\zeta$ , se puede ver en las siguientes figuras:



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación



Si de la expresión anterior se elimina la componente temporal se tiene la expresión de una elipse

$$\left(\frac{E_x}{C_{1x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{C_{1y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{C_{1x}}\right)\left(\frac{E_y}{C_{1y}}\right)\cos\zeta = \sin^2\zeta$$

Cuya representación es la mostrada en la figura siguiente.

En esta figura los ejes mayores y menores no coinciden con los ejes del sistema de coordenadas rectangular, sino que coinciden con un sistema de ejes rotados un ángulo  $\psi$  cuyo valor es



$$\psi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ \tan(2\alpha) \cos(\zeta) \right] \text{ donde } \alpha = \frac{C_{1y}}{C_{1x}}$$

Los semiejes principales  $A_{x'}$  y  $A_{y'}$  pueden escribirse en términos de las constantes  $C$  tal y como

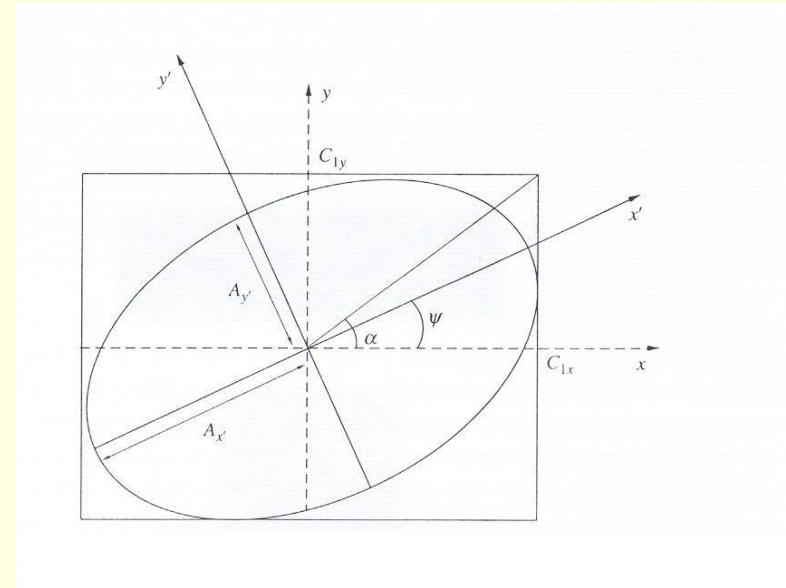
$$\left. \begin{aligned} A_{x'} &= C_{1x} \cos \psi + C_{1y} \sin \psi \\ A_{y'} &= -C_{1x} \sin \psi + C_{1y} \cos \psi \end{aligned} \right\} \text{ con las constantes relacionadas por } A_{x'}^2 + A_{y'}^2 = C_{1x}^2 + C_{1y}^2$$

Sobre este sistema de ejes rotados, la ecuación de la elipse podemos reescribirla como

$$\left( \frac{E_{x'}}{A_{x'}} \right)^2 + \left( \frac{E_{y'}}{A_{y'}} \right)^2 = 1$$

En este tipo de polarización, es interesante definir la relación axial (AR), como el cociente entre el eje mayor y el eje menor. Si  $A_{x'} > A_{y'}$ , entonces  $AR = A_{x'}/A_{y'}$ , mientras que si  $A_{x'} < A_{y'}$  entonces  $AR = (A_{x'}/A_{y'})^{-1}$ . Esta relación axial satisface la desigualdad

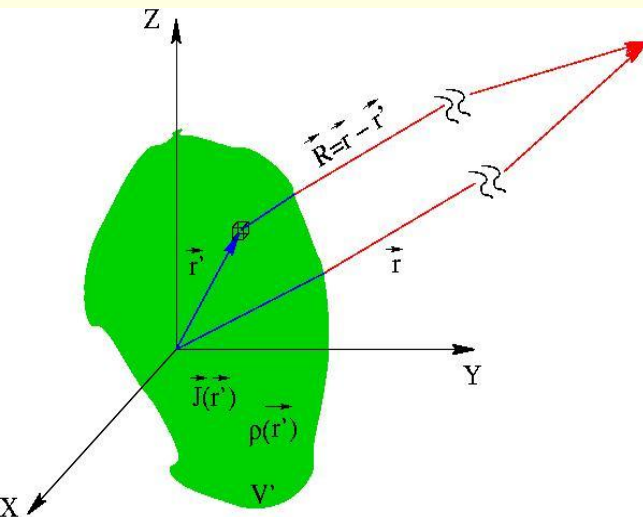
$$1 \leq AR \leq \infty$$



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## ✓ Aproximación a grandes distancias para los campos radiados

Supongamos una distribución de cargas y corrientes localizadas en un volumen finito  $V'$



$$\begin{aligned} \text{Si } kR \gg 1 \Rightarrow |\vec{r}| \gg |\vec{r}'| \Rightarrow R = |\vec{r} - \vec{r}'| &= \left( r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= r \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx r \left( 1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \\ &\approx r \left( 1 - \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r} \right) = r - \hat{r} \cdot \vec{r}' \end{aligned}$$

Con respecto a la función de Green, se tiene

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \approx \frac{e^{-jk(r - \hat{r} \cdot \vec{r}')}}{r} = \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'}$$

y los campos de radiación (en la aproximación de grandes distancias) vienen dados por



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

$$\vec{E}^r = \frac{jk}{4\pi\epsilon} \int_{v'} \left[ \rho(\vec{r}') \hat{R} - \sqrt{\mu\epsilon} \vec{J}(\vec{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \approx \frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{r} \times \left[ \hat{r} \times \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} dv' \right]$$

$$\vec{H}^r = -\frac{jk}{4\pi} \int_{v'} \left[ \hat{R} \times \vec{J}(\vec{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dv' \approx -\frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{r} \times \int_{v'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r}\cdot\vec{r}'} dv'$$

De ambas expresiones podemos deducir que existe una onda plana ya que

$$\vec{E}^r = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \hat{r} \times \vec{H}^r = \eta \vec{H}^r \times \hat{r}$$

donde  $\eta$  es la impedancia de onda.

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Dado que el potencial vector viene dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') e^{-jkR}}{R} dv' \approx \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{v'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv'$$

los campos electromagnéticos pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \vec{E}^r &= j\omega\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A}(\vec{r})) \\ \vec{H}^r &= -j\frac{\omega}{\eta} (\hat{r} \times \vec{A}(\vec{r})) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} E_r = 0 & ; \quad H_r = 0 \\ E_\theta = -j\omega A_\phi & ; \quad H_\theta = j\frac{\omega}{\eta} A_\phi = -\frac{E_\phi}{\eta} \\ E_\phi = -j\omega A_\theta & ; \quad H_\phi = -j\frac{\omega}{\eta} A_\theta = \frac{E_\theta}{\eta} \end{array} \right.$$

Definimos el vector de radiación como

$$\vec{N} = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv' = N_r \hat{r} + N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}$$

En función del vector de radiación, las expresiones de los potenciales y campos pueden escribirse como:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{N}$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

$$E_{\theta} = -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} N_{\theta} = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \eta N_{\theta} \quad ; \quad H_{\theta} = j \frac{\omega\mu}{\eta} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} N_{\phi} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} N_{\phi}$$
$$E_{\phi} = -j\omega\mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} N_{\phi} = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \eta N_{\phi} \quad ; \quad H_{\phi} = -j \frac{\omega\mu}{\eta} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} N_{\theta} = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} N_{\theta}$$

La densidad de potencia radiada y la potencia total radiada es

$$\vec{\phi} = \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{\eta}{4\lambda^2 r^2} \left[ |N_{\theta}|^2 + |N_{\phi}|^2 \right] \hat{r}$$

$$P_r = \int_S \vec{\phi} \cdot \hat{r} dS = \frac{\eta}{4\lambda^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ |N_{\theta}|^2 + |N_{\phi}|^2 \right] \sin\theta d\theta d\phi$$

## 4.- Funciones potenciales de fuentes magnéticas. Potenciales retardados

Hemos establecido las ecuaciones de Maxwell y sus soluciones para el caso de corrientes y cargas eléctricas, pero para ciertas situaciones es conveniente introducir, para simplificar los cálculos de los campos producidos por corrientes, unas distribuciones ficticias de densidad de corriente magnética y de densidad de carga magnética ( $\mathbf{M}, \rho_m$ ). Para el caso en el que sólo se presenten éste tipo de fuentes, las

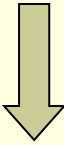
# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

ecuaciones de Maxwell quedan en la forma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D}_m &= 0 & \nabla \cdot \vec{B}_m &= \rho_m \\ \nabla \times \vec{E}_m &= -\vec{M} - j\omega \vec{B}_m & \nabla \times \vec{H}_m &= j\omega \vec{D}_m\end{aligned}$$

En un problema general en el que estuvieran presentes ambos tipos de fuentes eléctricas y magnéticas, la solución se obtendría mediante la superposición de las soluciones de un problema con solamente fuentes eléctricas y un problema con solamente fuentes magnéticas, quedando en general

Fuentes eléctricas  Dualidad  Fuentes Magnéticas

$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}_e) &= \rho \\ \nabla \times \vec{E}_e &= -\mu \frac{\partial \vec{H}_e}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0\end{aligned}$	$;$	$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mu \vec{H}_e) &= 0 \\ \nabla \times \vec{H}_e &= \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}_e}{\partial t}\end{aligned}$	$;$	$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}_m) &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}_m &= -\vec{M} - \mu \frac{\partial \vec{H}_m}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{M} + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} &= 0\end{aligned}$	$;$	$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mu \vec{H}_m) &= \rho_m \\ \nabla \times \vec{H}_m &= \epsilon \frac{\partial \vec{E}_m}{\partial t}\end{aligned}$
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  <div style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg); font-weight: bold; margin: 0 10px;">Superposición</div> </div>						
$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m \quad ; \quad \vec{H} = \vec{H}_e + \vec{H}_m$						

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Dado que  $\mathbf{D}_m$  es solenoidal siempre es posible encontrar una función potencial tal que

$$\vec{D}_m = -\nabla \times \vec{F}$$

que sustituyéndola en la Ley de Ampere se tiene

$$\nabla \times \vec{H}_m = j\omega \vec{D}_m = j\omega (-\nabla \times \vec{F}) \Rightarrow \nabla \times (\vec{H}_m + j\omega \vec{F}) = 0 \Rightarrow \exists \Psi / \vec{H}_m + j\omega \vec{F} = -\nabla \Psi$$

Expresión que nos permite relacionar los campos con sus funciones potenciales

$$\vec{D}_m = -\nabla \times \vec{F} \quad \text{y} \quad \vec{H}_m = -\nabla \Psi - j\omega \vec{F}$$

De las dos ecuaciones de las divergencias, ecuaciones que contienen las fuentes y previa imposición de la condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{F} + j\omega \mu \epsilon \psi = 0$$

se obtienen las ecuaciones de onda para los potenciales

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = -\frac{\rho_m}{\mu} \qquad \nabla^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} = -\epsilon \vec{M}$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

cuya solución es

$$\Psi(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\rho_m e^{-jkR}}{\mu 4\pi R} dV' \quad \vec{F}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\varepsilon \vec{M} e^{-jkR}}{4\pi R} dV' \quad \text{con } \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

similar a la obtenida para  $V$  y  $\mathbf{A}$ , lo que permite escribir para los campos de radiación expresiones semejantes

$$\vec{D}_m = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{V'} \left[ \left( jk + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} \right] \hat{R} \times \vec{M} dV' \quad \vec{H}_m = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{V'} \left[ \left( jk + \frac{1}{R} \right) \rho_m(\vec{r}') \vec{R} - j\omega\mu\varepsilon \vec{M}(\vec{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dV'$$

De igual forma se obtiene campos que dependen de  $1/R$  y otros que dependen de  $1/R^2$

Campos cercanos o inducidos

$$\vec{E}_m^i = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{e^{-jkR}}{R^2} \hat{R} \times \vec{M} dV'$$

$$\vec{H}_m^i = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{V'} \frac{e^{-jkR}}{R^2} \rho_m \hat{R} dV'$$

Campos lejanos o de radiación

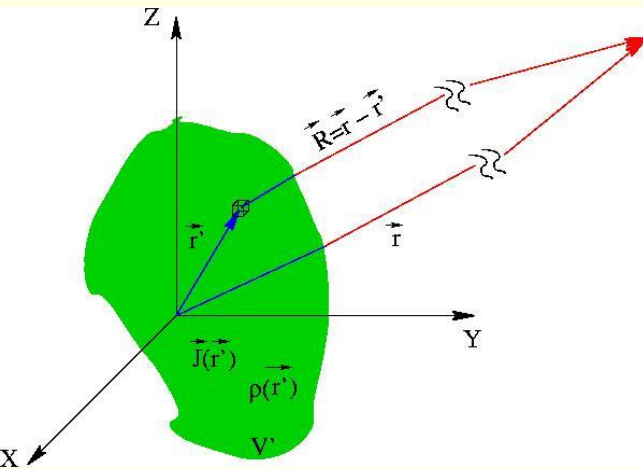
$$\vec{E}_m^r = \frac{jk}{4\pi} \int_{V'} \frac{e^{-jkR}}{R} \hat{R} \times \vec{M}(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{H}_m^r = \frac{jk}{4\pi\mu} \int_{V'} \left[ \rho_m(\vec{r}') \hat{R} - \sqrt{\mu\varepsilon} \vec{M}(\vec{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dV'$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

De igual forma a como se hizo con las fuentes eléctricas, podemos encontrar expresiones aproximadas de los campos de radiación imponiendo la condición de campo lejano.

Supongamos una distribución de cargas y corrientes localizadas en un volumen finito  $V'$



$$\begin{aligned} \text{Si } kR \gg 1 \Rightarrow |\vec{r}| \gg |\vec{r}'| \Rightarrow R = |\vec{r} - \vec{r}'| &= \left( r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= r \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx r \left( 1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \\ &\approx r \left( 1 - \frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r} \right) = r - \hat{r} \cdot \vec{r}' \end{aligned}$$

Con respecto a la función de Green, se tiene

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \approx \frac{e^{-jk(r - \hat{r} \cdot \vec{r}')}}{r} = \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'}$$

y los campos de radiación (en la aproximación de grandes distancias) vienen dados por

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

$$\vec{E}_m^r = \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \int_{V'} \hat{r} \times \vec{M}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dV' \quad \vec{H}_m^r = \frac{j\omega\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{r} \times \left[ \hat{r} \times \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dV' \right]$$

con el potencial **F** en su expresión de campo lejano

$$\vec{F} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dV'$$

Los campos de radiación por fuentes magnéticas en la aproximación de campo lejano pueden ser escritos en términos del vector **F** como

$$H_{r_m} = 0 \quad , \quad H_{\theta_m} = -j\omega F_{\theta} \quad , \quad H_{\phi_m} = -j\omega F_{\phi}$$

$$E_{r_m} = 0 \quad , \quad E_{\theta_m} = \eta H_{\phi_m} \quad , \quad E_{\phi_m} = -\eta H_{\theta_m}$$

De igual forma a como se hizo con las fuentes eléctricas, en antenas conviene introducir un vector de radiación por fuentes magnéticas definido como

$$\vec{L} = \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv' = L_r \hat{r} + L_{\theta} \hat{\theta} + L_{\phi} \hat{\phi}$$



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Y por tanto, los potenciales y los campos pueden ser escritos en términos de éste vector

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{L} & H_{\phi_m} &= -j\omega\varepsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} L_{\phi} & H_{\theta_m} &= -j\omega\varepsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} L_{\theta} \\ E_{\theta_m} &= \eta H_{\phi_m} = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} L_{\phi} & E_{\phi_m} &= -\eta H_{\theta_m} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} L_{\theta}\end{aligned}$$

La solución general, cuando están presentes fuentes eléctricas y magnéticas, se obtiene por superposición de ambos conjuntos de ecuaciones con el resultado.

$$\begin{aligned}E_{\theta} &= -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} [\eta N_{\theta} + L_{\phi}] \quad , \quad H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{\eta} \\ E_{\phi} &= -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} [\eta N_{\phi} - L_{\theta}] \quad , \quad H_{\theta} = -\frac{E_{\phi}}{\eta}\end{aligned}$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Como resumen podemos enunciar que:

- Los campos de radiación presentan una dependencia con la distancia de onda esférica
- Los campos de radiación presentan dependencia en  $\theta$  y  $\phi$  ya que la onda esférica no es homogénea.
- Esta onda esférica radiada se comporta localmente como una onda plana ya que los campos de radiación son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la energía y además la relación entre sus amplitudes corresponde a la impedancia de onda.
- Los campos de radiación no presentan dependencia con la componente radial.

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Veamos el significado del vector de radiación. La relación entre el vector de radiación y sus fuentes es una transformada de Fourier

$$\vec{N} = \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dv' \quad \left( \vec{S}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt \right)$$

debido a la analogía entre  $t$  y  $r'$  y  $\omega$  y  $-k$

Dado que el diagrama de radiación está relacionado con sus fuentes como una señal temporal con su espectro en frecuencias, para el estudio de los diagramas de radiación basta con efectuar, en primera aproximación, la transformada de Fourier de sus fuentes y viceversa.

Como ejemplo veamos diferentes tipos de iluminaciones (distribuciones de corriente en la antena) unidimensionales y sus diagramas de radiación.

Supongamos, por ejemplo, una función  $F(z')$  definida en el intervalo  $(-L/2, L/2)$ , con valor máximo 1 en el interior del intervalo y cero fuera de él. La densidad de corriente puede obtenerse como:

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

$$F(z') = \begin{cases} 1 & \text{si } |z'| \leq \frac{l}{2} \\ 0 & \text{si } |z'| > \frac{l}{2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \vec{N} &= \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dv' = \int_{V'} \vec{J}(x', y', z') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dx' dy' dz' = \\ &= \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') e^{jk_x x'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y') e^{jk_y y'} dy' \int_{-\infty}^{\infty} F(z') e^{jk_z z'} dz' = \\ &= \hat{z} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{jk_z z'} dz' = l \frac{\text{sen}\left(k_z \frac{l}{2}\right)}{k_z \frac{l}{2}} \hat{z} \end{aligned}$$

Expresión que corresponde a la transformada de Fourier de la función  $F(z')$ . (véase libro de tablas de la Schaum página 281)

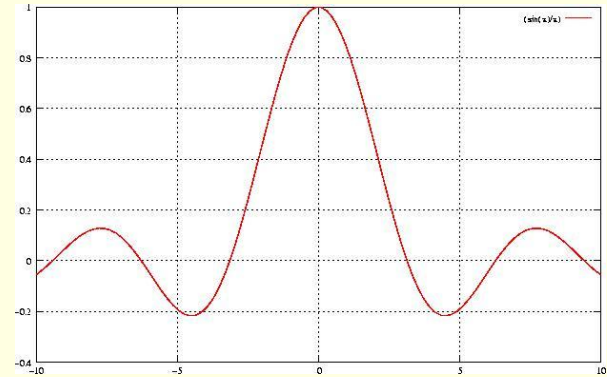
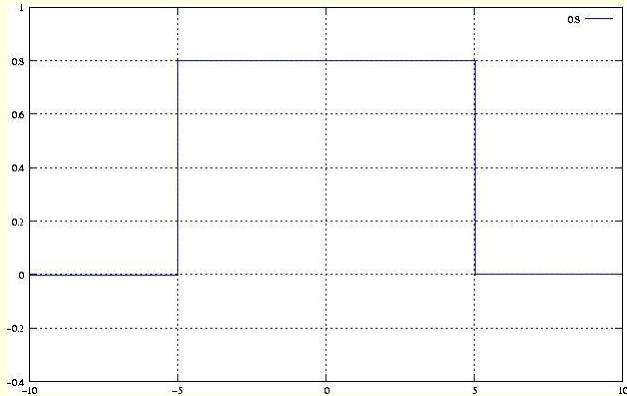
# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

a)

$$F(z') = 1$$

$\Rightarrow$

$$g(u) = l \frac{\text{sen}(u)}{u}$$

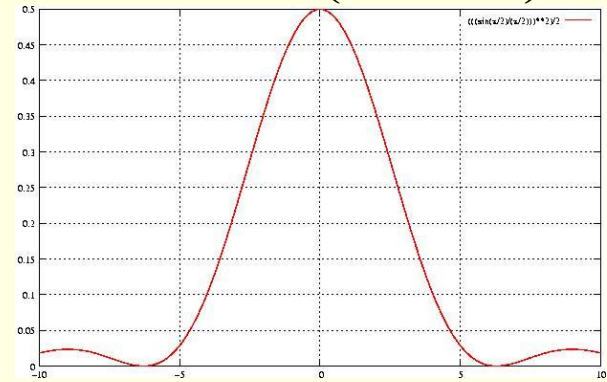
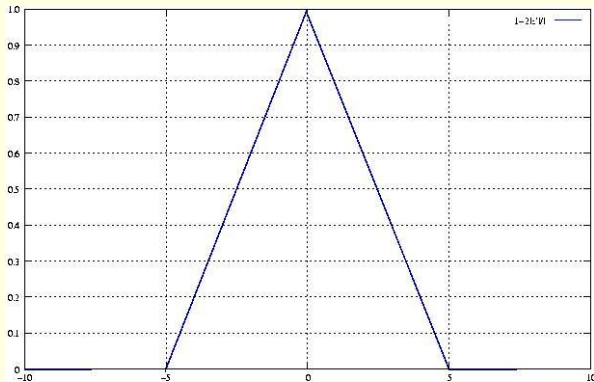


b)

$$F(z') = 1 - \frac{2}{l}|z'|$$

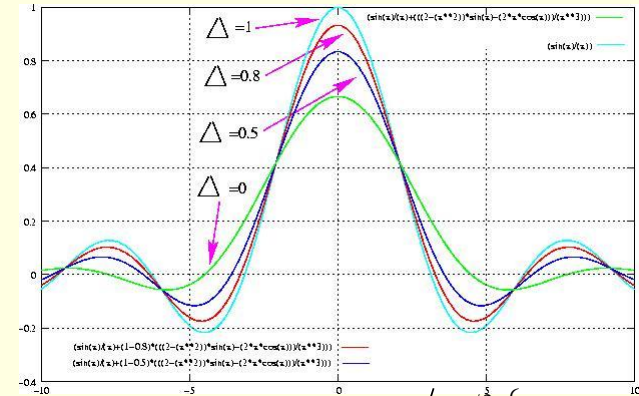
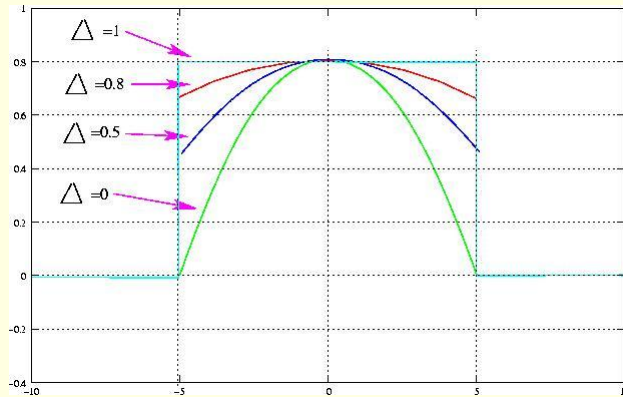
$\Rightarrow$

$$g(u) = \frac{l}{2} \left( \frac{\text{sen}(u/2)}{u/2} \right)^2$$

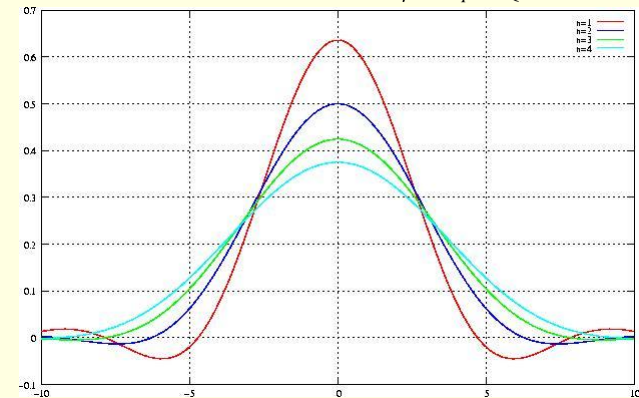
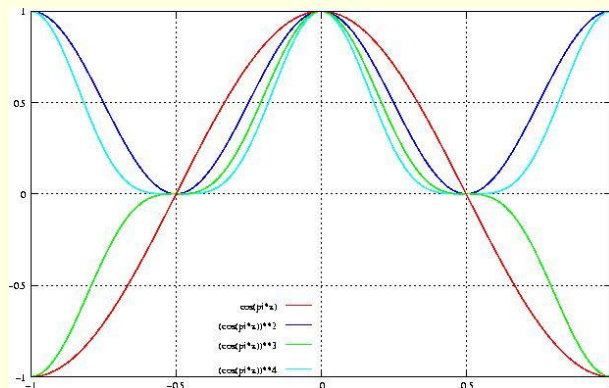


# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

c)  $F(z') = 1 - (1 - \Delta) \left( z' \frac{2}{l} \right)^2 \Rightarrow g(u) = l \left( \frac{\sin(u)}{u} + (1 - \Delta) \frac{d^2}{du^2} \left( \frac{\sin(u)}{u} \right) \right)$



d)  $F(z') = \cos^n \left( \frac{\pi}{l} z' \right) \Rightarrow g(u) = \frac{2l}{\pi} n! \cos(u) / \prod_{p=0}^{(n-1)/2} \left\{ (2p+1)^2 - \frac{4u^2}{\pi^2} \right\}, n \text{ impar} ; g(u) = l n! \sin(u) / u \prod_{p=1}^{n/2} \left\{ (2p)^2 - \frac{4u^2}{\pi^2} \right\}, n \text{ par}$



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## 5.- Regiones de Fresnel y de Fraunhofer

De las expresiones generales de los campos hemos supuesto la existencia de dos regiones espaciales, una en la que predominan los campos inducidos y otra en la que predominan los campos de radiación, pero no se ha marcado la frontera entre ellas. Vamos a establecer esta frontera para el caso unidimensional (de forma parecida se establecería en el caso general).

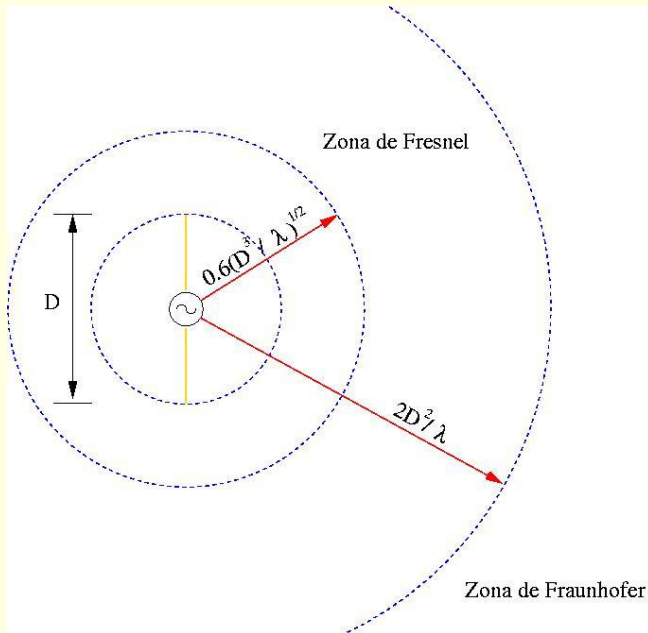
En la aproximación de campo lejano, el valor aproximado de  $R$  en fase es exacto cuando la distancia al punto campo es infinita y alcanza su máximo error a una distancia del punto fuente de  $\lambda/16$  que corresponde a  $22.5^\circ$  ( $\pi/8$ ) en fase.

Usualmente y a efectos de calculo de enlaces, la aproximación de campo lejano se puede considerar una expresión exacta ya que suponemos que a distancia entre antena emisora y receptora es muy grande.

Sin embargo cuando se caracterizan antenas (se miden sus propiedades) es muy importante que la antena bajo prueba y la sonda de medida sea superior a la distancia mínima de campo lejano para que el diagrama de radiación presente poco error respecto al que se mediría en el infinito.

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Consideremos una distribución lineal de corriente de dimensión máxima  $D$  (dimensión máxima de la antena o el diámetro de la máxima circunferencia centrada en la antena).



Del valor exacto de la distancia  $R$  y haciendo uso de la serie binómica

$$R = \left( r^2 + (z'^2 - 2rz' \cos \theta) \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$R = r - z' \cos \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{z'^2}{r} \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{z'^3}{2} \sin^2 \theta \cos \theta \right) + \dots$$

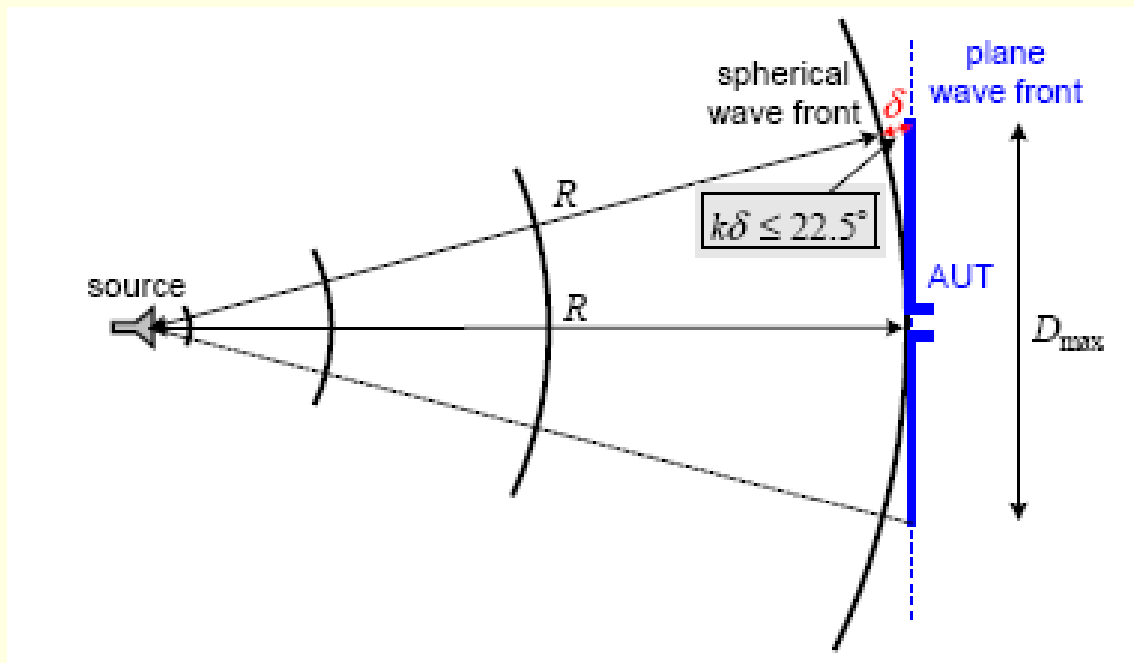
Sustituyendo este valor en el potencial vector (lo mismo se haría para el potencial debido a fuentes magnéticas)

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-D/2}^{D/2} \hat{z} I(z') \frac{e^{-jkR}}{R} dz' = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{-D/2}^{D/2} \hat{z} I(z') e^{-jkz' \cos \theta} e^{-jk \frac{z'^2}{2r} \sin^2 \theta} e^{-jk \frac{z'^3}{2r^2} \cos \theta \sin^2 \theta} \dots dz'$$



# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Aproximándonos desde el infinito hasta la antena, todos los términos, salvo el primero, pasan de tomar valores despreciables a valores medibles. En la situación más desfavorable ( $z'=D/2$  y  $\theta=\pi/2$ ), la región desde el infinito hasta la distancia a la que se comente un error máximo de  $22.5^\circ$  en fase es aquella en la que deja de aproximarse los frentes de ondas planos a frentes de ondas esféricos.



A esta región se le conoce como zona de Fraunhofer o región de campo lejano y queda definida por

$$2 \frac{D^2}{\lambda} \leq r < \infty$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

Acercándonos un poco más a la antena, hemos de considerar la siguiente región, por lo que siguiendo razonamientos idénticos a los anteriores encontramos un límite para esta región de

$$0.6 \left( \frac{D^3}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \leq r \leq \frac{2D^2}{\lambda}$$

A la región definida de esta forma se le conoce como región de Fresnel o zona de campo cercano de radiación.

Por último, el siguiente término nos define la región de campos cercano reactivos como

$$r < 0.6 \left( \frac{D^3}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$$

# Tema 1.- Fundamentos de la Radiación

## Bibliografía:

- Matthew N.O. Sadiku, *Elements of Electromagnetics*, 5º Ed. Oxford university Press
- Carl T. Johnk, *Engineering Electromagnetic Fields and Waves*, 2º ed. Wiley, 1988
- John D. Kraus and Daniel A. Fleisch, *Electromagnetics with applications*, 5ª ed. McGraw-Hill, 1999
- Nathan Ida, *Engineering Electromagnetics*, Springer, 2004.
- Simon Ramo et al, *Fields and Waves Communication Electronics*. 3ª ed. Wiley, 1993