

*Antena de bocina y
reflector parabólico*

Antenas y Propagación

Tema 6

Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Índice:

1. Introducción
2. Revisión de guías de ondas
3. Campos radiados por aperturas. Principio del campo equivalente
 1. Apertura elemental
 2. Apertura rectangular uniforme
4. Antenas de bocina.
 1. Bocinas sectoriales
 2. Bocinas piramidales
5. Antenas reflectoras
 1. Reflectores planos
 2. Reflectores diédricos
 3. Reflectores parabólicos

Anexo: (No entra en el examen)

- 1.- Guías de ondas cilíndricas
- 2.- Cavidades resonantes



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

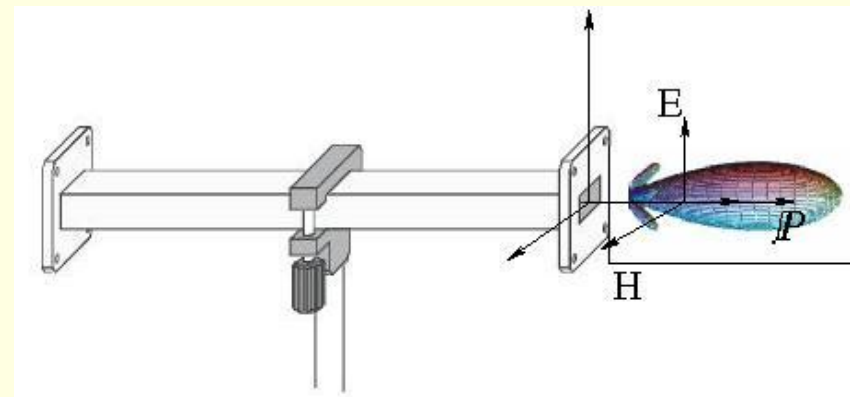
1.- Introducción

Un tipo de antenas distintas a las antenas lineales estudiadas hasta ahora en las que asumíamos distribuciones estacionarias de corriente y por tanto considerábamos a cada elemento de corriente como fuente de radiación, son las antenas de apertura las cuales trabajan en el rango de las microondas presentan una alta directividad.

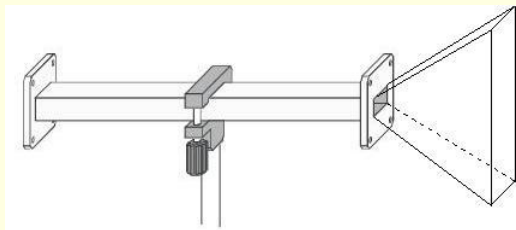
Este tipo de antenas se suelen construir con estructuras altamente conductoras (guías de ondas) y a través de aperturas en su estructura permite la radiación de energía electromagnética dentro de la región de las microondas.

El ejemplo más usual de este tipo de antenas es una guía de ondas rectangular con su extremo en abierto ya que la energía que se establece en su interior alcanza la apertura y se comporta como un elemento radiante.

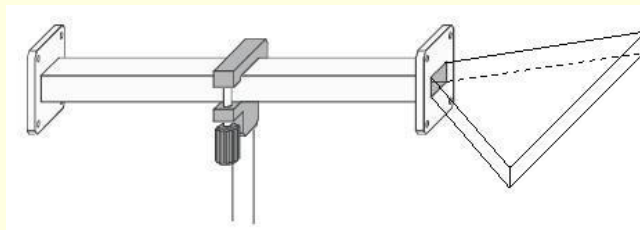
Para obtener una mayor adaptación entre la impedancia de la guía y la del medio, se suele acoplar bocinas que pueden ser sectoriales en plano **E** o **H** o bocinas piramidales, tales y como se representan en la siguiente figura



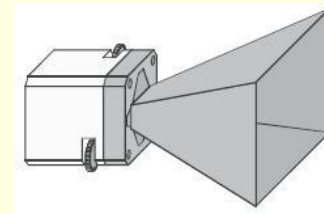
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores



Bocina sectorial en plano E

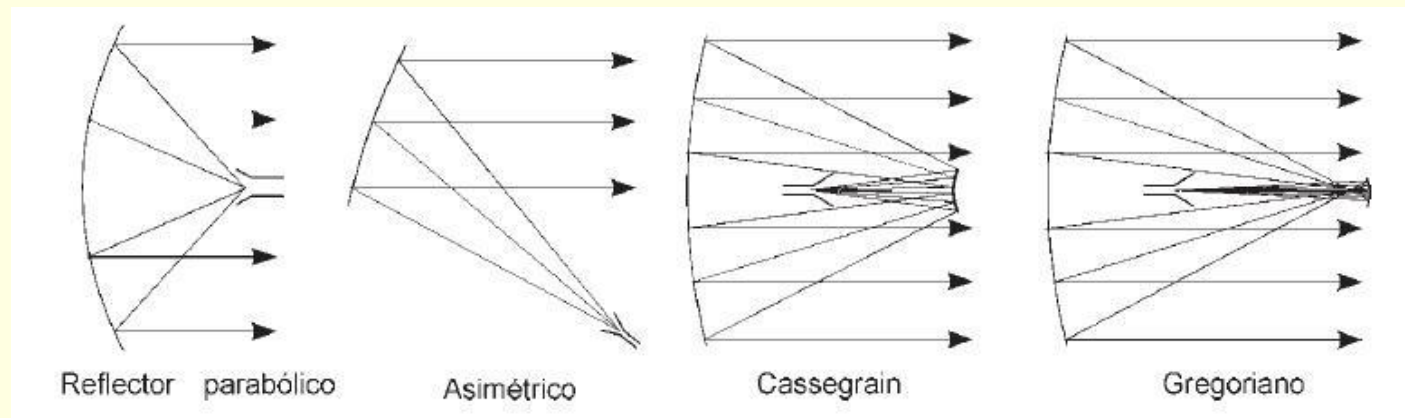


Bocina sectorial en plano H



Bocina piramidal

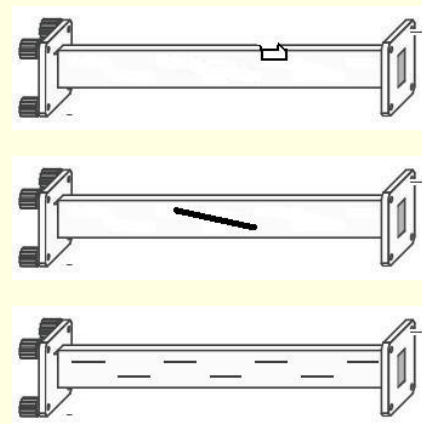
Una de las aplicaciones más importantes de este tipo de antenas es en conexión con reflectores, bien simples o compuestos (como puede ser la antena cassegrain)



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Otro tipo de antenas de apertura son las conocidas como antenas de rendija (o de hendidura) la cual se obtiene haciendo unas muescas o ranuras en la estructura conductora. Las rendijas pueden ser de diferentes formas y constituir agrupaciones de rendijas.

El análisis de este tipo de antenas, el responsable de la radiación, no la constituye la fuente primaria de excitación de la guía sino los campos E y H presentes en la apertura. Dado que la radiación se realiza a través de la boca de la guía (apertura), un planteamiento sería suponer que los campos radiados al espacio libre por las corrientes en el interior de la guía pueden obtenerse únicamente a partir del conocimiento de la distribución de campos en la propia apertura. La ventaja de este planteamiento es que se evita el cálculo de la distribución de corrientes sobre toda la estructura y por otra parte, permite realizar la integración sobre la propia apertura cuya geometría es, en general, más fácil de integrar.



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

2.- Revisión de guías de ondas

Una guía de ondas es un dispositivo físico capaz de transportar energía desde los generadores hasta las cargas. Diferencias básicas entre las guías de ondas y las líneas de transmisión son:

1. La línea de transmisión soporta solo ondas transversales electromagnéticas (TEM) mientras que las guías pueden transportar diferentes configuraciones de los campos.
2. Las líneas de transmisión operan desde corriente continua ($f = 0$) hasta los 3 GHz. mientras que las guías solo pueden operar por encima de una frecuencia crítica (frecuencia de corte) por lo que éstas presentan comportamiento de filtros paso-alta.

El rango de operación en frecuencia de la línea de transmisión es debido a las pérdidas por efecto pelicular así como a las pérdidas dieléctricas (ambas crecen con la frecuencia).

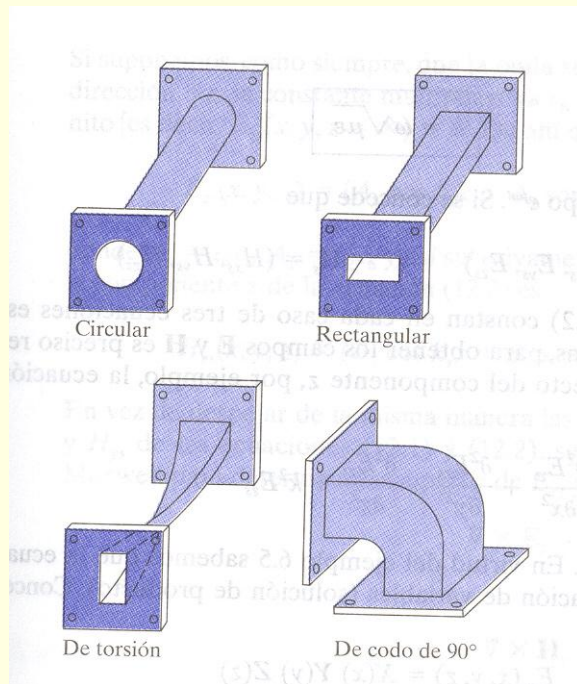
Las guías presentan menor atenuación de la señal en ese rango de frecuencias.

3. Las dimensiones físicas de las guías van en función de las frecuencia, por lo que éstas serían demasiado grandes en rangos inferiores a las microondas.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

La fotografía corresponde a las instalaciones de los primeros radares donde puede observarse el tamaño considerable de las guías de ondas usadas.

Las guías más comunes son las rectangulares y las circulares.



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Supongamos una guía de ondas rectangular como la mostrada en la figura

Supongamos que la guía está ocupada por un dieléctrico sin pérdidas ($\sigma = 0$) y no posee fuentes ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$). Las paredes de la guía son perfectamente conductoras.

Las ecuaciones de ondas para los campos eléctricos y magnéticos vienen dadas por

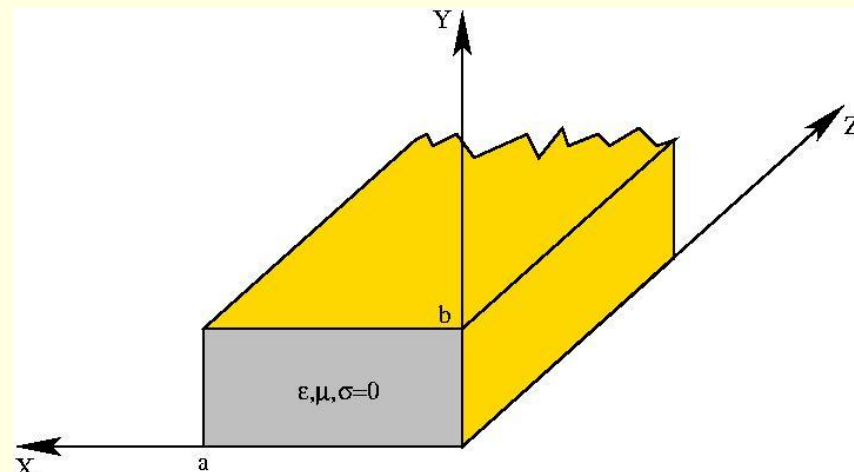
$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

donde: $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ es el número de ondas.

Supuesto los campos eléctricos y magnéticos dados por

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$$

tendríamos que resolver 6 ecuaciones tipo Helmholtz, esto es una para cada



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

componente. Por ejemplo para la componente z se tiene

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0$$

Cuya solución es (variables separables) $E_z = X(x)Y(y)Z(z)$

Sustituyendo en la ecuación y dividiendo por XYZ, se tiene

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k^2$$

y dado que son independientes unas de otras, cada término ha de ser una constante que puede expresarse como

$$-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 = -k^2$$

donde $-k_x^2, -k_y^2$ y γ^2 son las constantes de separación, la cual nos permite escribir la ecuación como

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$X'' + k_x^2 X = 0$$

$$Y'' + k_y^2 Y = 0$$

$$Z'' - \gamma^2 Z = 0$$

Y por tanto las soluciones serán

$$X(x) = c_1 \cos(k_x x) + c_2 \operatorname{sen}(k_x x)$$

$$Y(y) = c_3 \cos(k_y y) + c_4 \operatorname{sen}(k_y y)$$

$$Z(z) = c_5 e^{\gamma z} + c_6 e^{-\gamma z}$$

esto es

$$\begin{aligned} E_z(x, y, z) &= (c_1 \cos(k_x x) + c_2 \operatorname{sen}(k_x x)) (c_3 \cos(k_y y) + c_4 \operatorname{sen}(k_y y)) (c_5 e^{\gamma z} + c_6 e^{-\gamma z}) = \\ &= (A_1 \cos(k_x x) + A_2 \operatorname{sen}(k_x x)) (A_3 \cos(k_y y) + A_4 \operatorname{sen}(k_y y)) e^{-\gamma z} \end{aligned}$$

donde se ha supuesto que la onda se propaga a lo largo de la guía (+z)

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

De igual forma se tiene para el campo H

$$H_z(x, y, z) = (B_1 \cos(k_x x) + B_2 \operatorname{sen}(k_x x))(B_3 \cos(k_y y) + B_4 \operatorname{sen}(k_y y))e^{-\gamma z}$$

Para el cálculo de las demás componentes se aplica las ecuaciones de Maxwell, obteniéndose

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega\varepsilon E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\varepsilon E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon E_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} E_x &= -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_y &= -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_x &= \frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ H_y &= -\frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned}$$

donde $h^2 = \gamma^2 + k^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon = k_x^2 + k_y^2$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Modos de campos (supuesta la propagación en la dirección z)

1. Modo TEM o transversal electromagnético

Según las ecuaciones anteriores, la guía de ondas rectangular no puede soportar el modo TEM dado que todas las componentes de los campos tenderían a cero

2. Modo TM o transversal magnético

3. Modo TE o transversal eléctrico

4. Modo H o modo híbrido

✓ Modos transversales magnéticos (TM).

En este caso las componentes del campo magnético son normales a la dirección de propagación por lo que $E_z \neq 0$ y $H_z = 0$ y además ha de cumplir las condiciones de contorno del problema, esto es, las componentes tangenciales de los campos eléctricos han de ser continuas en las interfases.

$$E_z = 0 \text{ en } x=0 \quad ; \quad E_z = 0 \text{ en } y=0$$

$$E_z = 0 \text{ en } x=a \quad ; \quad E_z = 0 \text{ en } y=b$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Sustituyendo las condiciones de contorno en la expresión de la componente z del campo eléctrico se tiene

$$E_z = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

donde E_0 es constante y $k_x = m\pi/a$ y $k_y = n\pi/b$ con $m = 0,1,2,3,\dots$ y $n = 0,1,2,3,\dots$. De igual forma se obtienen las demás componentes de los campos por lo que sus expresiones son

$$E_x = -\frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

donde

$$h^2 = (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) = k_x^2 + k_y^2 = \left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^2$$

Al término h se le denomina valor característico o autovalor de modo TM_{mn} . A su vez cada pareja de valores m y n producen un conjunto de sub-modos en la guía denominados modos TM_{mn} . Sin embargo no todos los sub-modos son compatibles dado que los $(0,0)$, $(0,n)$ y los $(m,0)$ dan componentes de los campos que tenderían a cero por lo que se extinguirían en la propia

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

guía. El modo de menor orden es el TM_{11} .

✓ **Modos transversales eléctricos (TE).**

En este caso las componentes del campo eléctrico son normales a la dirección de propagación por lo que $E_z = 0$ y $H_z \neq 0$ y además ha de cumplir las condiciones de contorno del problema, esto es, las componentes tangenciales de los campos eléctricos han de ser continuas en las interfaces.

$$E_y = 0 \text{ en } x=0$$

$$E_x = 0 \text{ en } y=0$$

$$E_y = 0 \text{ en } x=a$$

$$E_x = 0 \text{ en } y=b$$

Con base en las ecuaciones que dan las componentes de los campos eléctricos y magnéticos así como de la continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico, las condiciones en la frontera pueden ser escritas como

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ en } x=0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ en } y=0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ en } x=a$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ en } y=b$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Sustituyendo las condiciones de contorno en la expresión de la componente z del campo magnético se tiene

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

donde H_0 una constante y $k_x = m\pi/a$ y $k_y = n\pi/b$ con $m = 0,1,2,3,\dots$ y $n = 0,1,2,3,\dots$. De igual forma se obtienen las demás componentes de los campos por lo que sus expresiones son

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$H_x = \frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

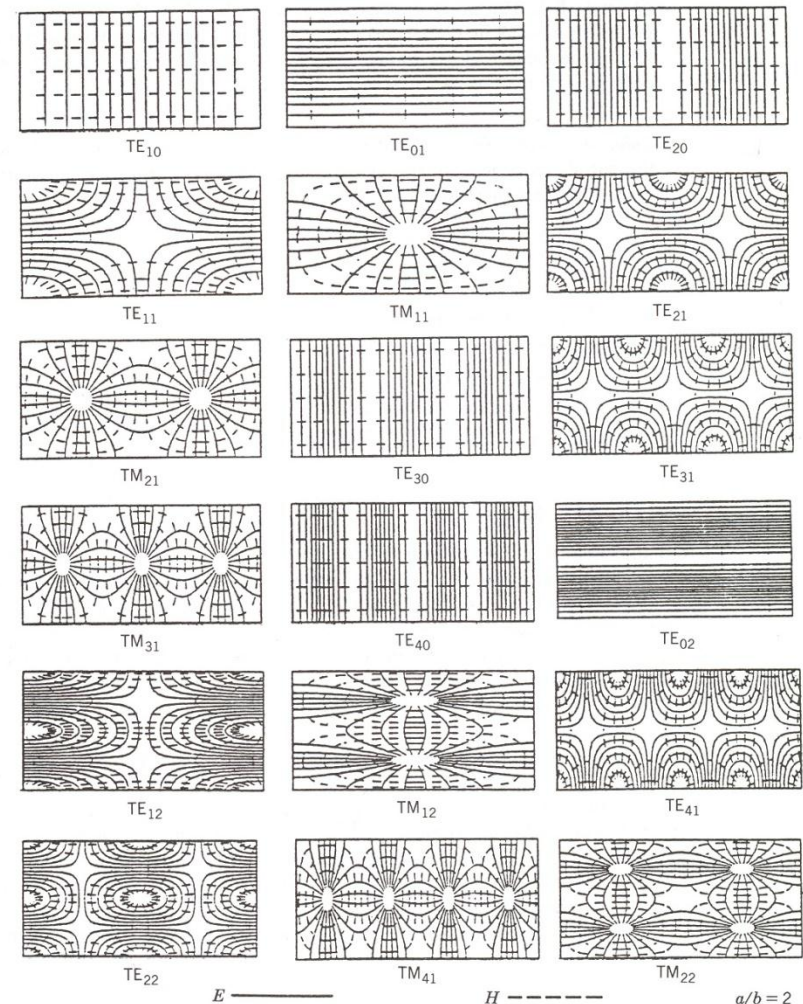
$$H_y = \frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

A diferencia del modo TM, en el modo TE los valores para m y n pueden ser cero pero no a la vez, esto es el modo TE_{00} forzaría a todas las componentes de los campos a tender a cero.

El menor modo posible será por tanto el modo TE_{10} o el modo TE_{01} dependiendo de las características geométricas de la guía.

Una representación de los campos E y H para los 18 primeros modos es la mostrada en la figura



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

La constante de propagación viene dada por:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

La frecuencia a la cual la constante de propagación es cero, $\gamma = 0$, se denomina frecuencia de corte del modo correspondiente al autovalor dado. Para esta frecuencia se cumple que

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_c = \frac{h}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \Rightarrow \gamma = h \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \Rightarrow \lambda_c = \frac{v'}{f_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(m/a\right)^2 + \left(n/b\right)^2}}$$

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \text{ (rad / s)}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v'}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Con respecto a la frecuencia de corte del modo TE se tiene que para guías comunes, aquellas en las que $a > b$, viene dada por

$$f_c^{TE_{10}} = \frac{v'}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} = \frac{v'}{2a} < f_c^{TE_{01}} = \frac{v'}{2} \sqrt{\left(\frac{0}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{v'}{2b}$$

La longitud de onda de este es $\lambda_c^{TE_{10}} = 2a$

La frecuencia de corte del modo TM_{11} es

$$f_c^{TM_{11}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{v'}{2ab} \sqrt{a^2 + b^2}$$

La cual es mucho mayor que la del modo TE_{10} . Por tanto este es el **modo dominante** en esta guía, definido como el modo que presenta la menor frecuencia de corte o la mayor longitud de onda de corte.

En la guía no se propagará ninguna onda con frecuencia menor que la del modo dominante, por lo que la guía presenta características de filtro pasa alta.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Con respecto a la impedancia característica de la guía, se tiene para cada modo

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{Z}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$$

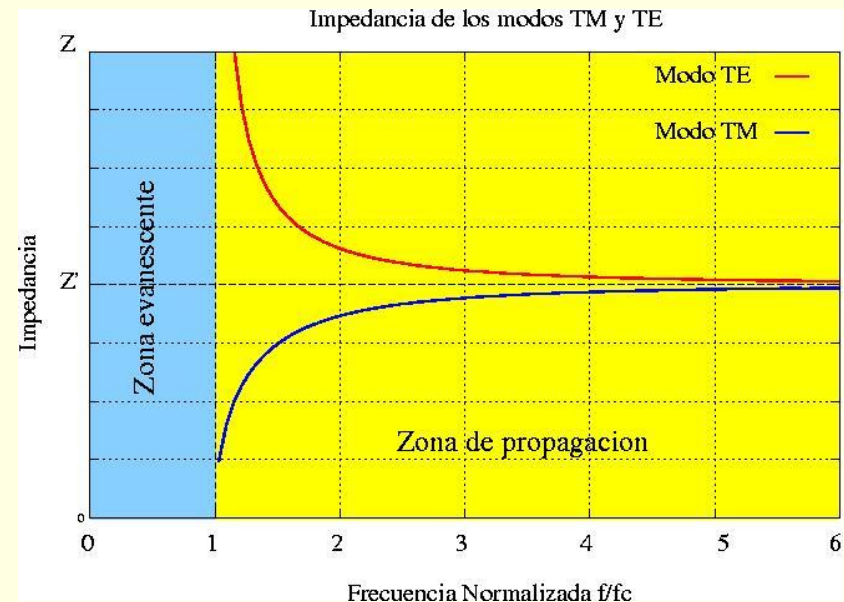
$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1-(f_c/f)^2} = Z\sqrt{1-(f_c/f)^2}$$

Como se puede ver, tanto Z_{TE} como Z_{TM} son resistivas puras y dependen de la frecuencia.

Además se cumple que

$$Z = \sqrt{Z_{TE}Z_{TM}}$$

donde Z es la impedancia intrínseca de una onda plana uniforme en el medio ilimitado de igual característica que el medio en la guía.



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

En función del valor de la frecuencia normalizada, se tienen dos regiones características.

1. Modo de propagación.

En este modo las frecuencias serán $(f/f_c)^2 > 1$, o bien $f > f_c$ esto es $\omega^2 \mu \epsilon > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ y por tanto la constante de propagación será imaginaria pura

$$\gamma = j\beta = jk\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

con

$$\beta = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \text{ (rad / s)}$$

La longitud de onda es

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$$

La velocidad de fase de la onda propagándose en la guía es

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v'}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda_g}{\lambda} v' > v'$$

La velocidad de grupo de la onda propagándose en la guía es

$$v_g = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = v' \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{\lambda}{\lambda_g} v' < v'$$
$$v_g v_f = (v')^2$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

2. Modo evanescente $(f/f_c)^2 < 1$, o bien $f < f_c$

En este caso la constante de propagación es real por lo que la constante de atenuación es distinta de cero y la constante de fase igual a cero, esto es,

$$\gamma = \alpha = h\sqrt{1 - (f/f_c)^2}, \quad f < f_c$$

Como todas las componentes de los campos presentan el factor $e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z}$ estos decrecen con la distancia z , por lo que se atenúan en el interior de la guía. A este efecto se le denomina evanescencia.

La impedancia que presenta la guía en modo evanescente es $Z_{TM} = -j \frac{h}{\omega \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$ que como se observa es reactiva pura y esto nos lleva a pensar que no puede existir un flujo de potencia asociado a un modo evanescente.

En general una guía de ondas rectangular presenta una región evanescente a frecuencia inferior a la de corte y un modo de propagación a frecuencias superiores a la de corte, por lo que como hemos comentado anteriormente su comportamiento se asemeja a la de un filtro paso alta.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

✓ Potencia transmitida. Pérdidas. Atenuación

El flujo de potencia en una guía viene dada por

$$\mathcal{P}_{prom} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[E_x H_y^* - E_y H_x^* \right] \hat{k} = \frac{|E_x|^2 + |E_y|^2}{2Z}$$

donde Z es la impedancia del modo TE o la del modo TM.

La potencia total promedio transmitida por la sección de la guía es

$$P_{prom} = \int \vec{\mathcal{P}}_{prom} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_0^b \frac{|E_x|^2 + |E_y|^2}{2Z} dy dx$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Para el caso particular de guías disipativas ocurre una pérdida continua de potencia conforme una OEM se propaga por ella

$$P = \int_S \vec{\mathcal{P}}_{prom} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{E_0^2}{2|Z|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_Z dydx = P_0 e^{-2\alpha z}$$

Para conservar esta potencia, el decrecimiento de la potencia promedio ha de ser igual a la pérdida de potencia promedio temporal por unidad de longitud, esto es,

$$P_L = -\frac{dP_{prom}}{dz} = 2\alpha P_{prom}$$

o bien

$$\alpha = \frac{P_L}{2P_{prom}} = \alpha_c + \alpha_d$$

donde α_c es la constante de atenuación en el conductor debido a pérdidas óhmicas y α_d la constante de atenuación debida a las pérdidas dieléctricas

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Para determinar la constante de atenuación en el dieléctrico se hace igual que en un medio sin pérdidas con la salvedad de que en la constante de propagación $\gamma=j\beta$ la constante dieléctrica ha de ser compleja, esto es,

$$\gamma = \alpha_d + j\beta_d = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon_c}$$

donde $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$

Igualando parte real y parte imaginaria, se tiene

$$\begin{cases} \alpha_d^2 - \beta_d^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon \\ 2\alpha_d \beta_d = \omega \mu \sigma \end{cases}$$

Si suponemos pérdidas pequeñas por atenuación, entonces,

$$\alpha_d = \frac{\sigma Z}{2\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad \text{y} \quad \beta_d = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

donde Z es la impedancia de una onda plana propagándose en un medio μ, ϵ

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

De igual forma aunque algo más tediosa se obtendría la constante de atenuación en el conductor, obteniéndose

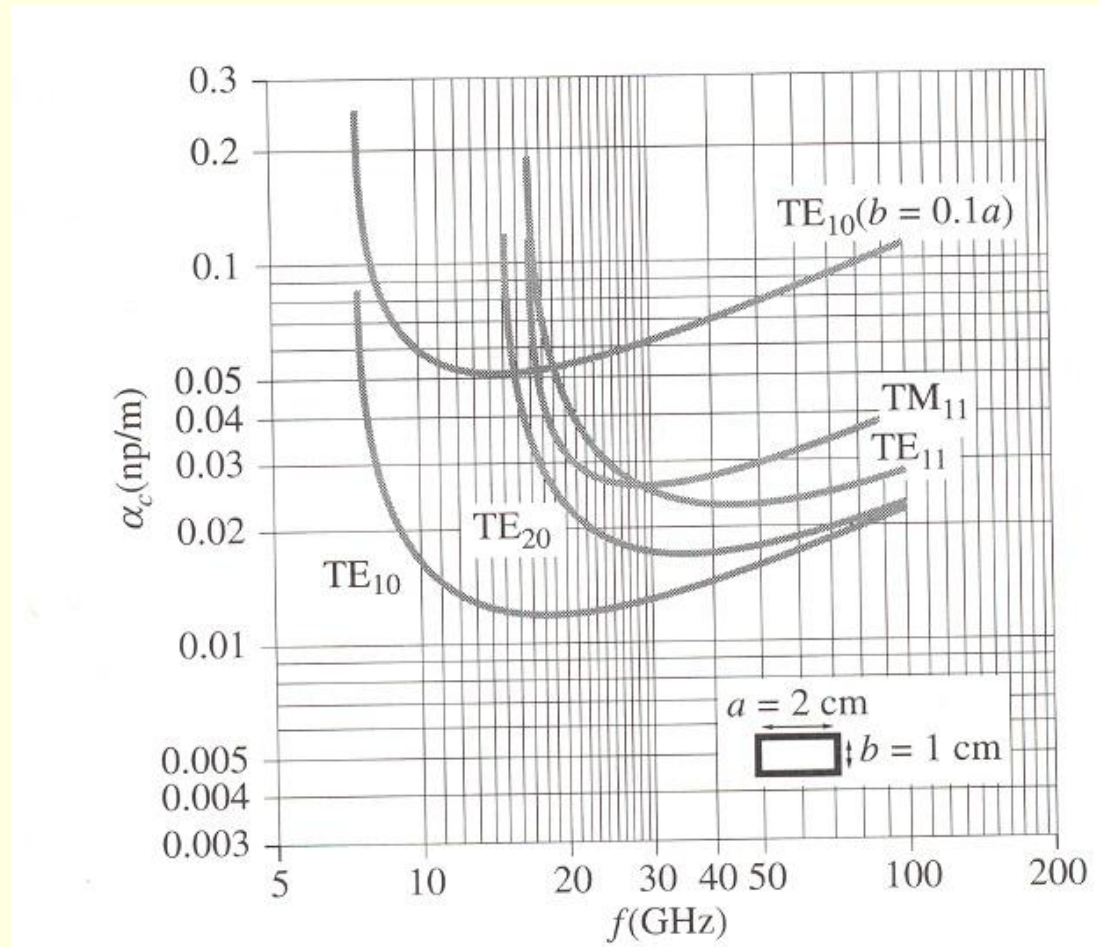
a) Para el modo TE_{10}
$$\alpha_c = \frac{2R_s}{bZ' \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{a} \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right)$$
 Z' es la impedancia del modo TE o TM

b) Para el modo TE_{mn} (con $n \neq 0$)
$$\alpha_c = \frac{2R_s}{bZ' \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \left[\left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 + \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} m^2 + n^2 \right)}{\left(\frac{b}{a} \right)^2 m^2 + n^2} \left(1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right) \right]$$

c) Para el modo TM_{mn}
$$\alpha_c = \frac{2R_s}{bZ' \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \left[\frac{\left(\frac{b}{a} \right)^3 m^2 + n^2}{\left(\frac{b}{a} \right)^2 m^2 + n^2} \right]$$
 La constante de atenuación total será
$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

En la siguiente gráfica se representa la atenuación para diferentes modos.



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

3.- Campos radiados por aperturas. Principio del campo equivalente

Entenderemos por apertura una región plana de superficie S_0 sobre la que suponemos que existen unos campos iluminantes conocidos, \mathbf{E} y \mathbf{H} . Aunque el término apertura puede generalizarse a cualquier superficie curva, en el análisis que sigue nos referiremos al caso plano, puesto que es el que más interés tiene y el que permite además una resolución analítica simple.

Deduciremos en primer lugar el equivalente electromagnético de una apertura y las expresiones necesarias para el cálculo de los campos radiados. Aunque el análisis de estas expresiones pueden hacerse para rectangulares y circulares, por falta de tiempo, sólo la haremos para el caso de aperturas rectangulares.

Supongamos una apertura plana de superficie S . Los teoremas de equivalencia y de unicidad mencionados a lo largo del curso nos permiten sustituir los campos existentes sobre la superficie S por una distribución de corrientes equivalentes de tal forma que es equivalente el problema original por otro en el que retiramos las fuentes en el interior de la antena y las sustituimos por campos nulos en el interior y sobre la superficie S mantenemos los valores tangenciales del campo \mathbf{E} ($\hat{n} \times \vec{E}$) y los del campo \mathbf{H} ($\hat{n} \times \vec{H}$). Así pues si las componentes tangenciales del campo son completamente conocidas sobre una estructura cerrada puede, a través de la carga y corriente eléctricas y magnética

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

equivalente , pudiéndose por tanto obtener los campos en la región externa a esta superficie.

Como vimos en el tema 1, las ecuaciones de Maxwell pueden simetrizarse introduciendo una densidad de carga magnética (ρ_m) y una densidad de corriente magnética (\vec{M})

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D}_m &= 0 & \nabla \cdot \vec{B}_m &= \rho_m \\ \nabla \times \vec{E}_m &= -\vec{M} - j\omega \vec{B}_m & \nabla \times \vec{H}_m &= j\omega \vec{D}_m\end{aligned}$$

En un problema general en el que estuvieran presentes ambos tipos de fuentes eléctricas y magnéticas, la solución se obtendría mediante la superposición de las soluciones de un problema con solamente fuentes eléctricas y un problema con solamente fuentes magnéticas, quedando en general

<p>Fuentes eléctricas</p> $\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}_e) &= \rho \\ \nabla \times \vec{E}_e &= -\mu \frac{\partial \vec{H}_e}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0\end{aligned}$	<p>←</p>	<p>Dualidad</p> <p>↓</p> <p>Superposición</p>	<p>→</p>	<p>Fuentes Magnéticas</p> $\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}_m) &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}_m &= -\vec{M} - \mu \frac{\partial \vec{H}_m}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{M} + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} &= 0\end{aligned}$
$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m \quad \vec{H} = \vec{H}_e + \vec{H}_m$				

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

El desarrollo del teorema de equivalencia de los campos requiere el uso de las condiciones generalizadas de contorno asociadas con las ecuaciones de Maxwell simétricas dadas en la transparencia anterior. La forma integral de estas es:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \quad ; \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \vec{M} \cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_m \quad ; \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Las condiciones de contorno son:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad ; \quad \hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \rho_{sm}$$
$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = -\vec{M}_s \quad ; \quad \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

en donde el \hat{n} es el vector unitario normal que va desde la región 2 a la región 1. Las ecuaciones anteriores muestran los efectos adicionales de las cargas y corrientes magnéticas superficiales ficticias, ρ_{sm} y \vec{M}_s , en la interface. *El teorema del campo equivalente* es aplicable a una interface tal que el campo en uno de sus lados es nulo. Con la suposición de campo nulo en la región 2, las condiciones de contorno se convierten en:

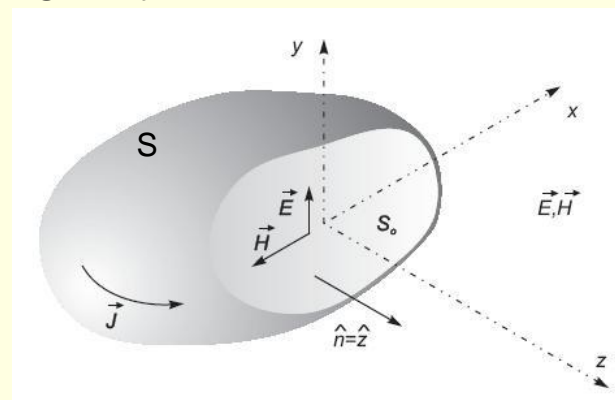
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot \vec{D}_1 &= \rho_s & ; & \quad \hat{n} \cdot \vec{B}_1 = \rho_{sm} \\ \hat{n} \times \vec{E}_1 &= -\vec{M}_s & ; & \quad \hat{n} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s\end{aligned}$$

Las expresiones anteriores establecen que las componentes normales de los campos eléctrico y magnético sufren un salto brusco hasta cero en la región 2 solo si existen densidades superficiales de carga eléctrica y magnética ρ_s y ρ_{sm} con valores iguales a las componentes normales **D** y **B** respectivamente. Asimismo, son admisibles transiciones bruscas al valor cero de las componentes tangenciales **E** y **H** solo si existen en la interface densidades superficiales de corriente eléctrica y magnética, \vec{J}_s y \vec{M}_s respectivamente.

Supongamos una distribución de fuentes conocidas, cargas y corrientes, como se muestra en la figura.

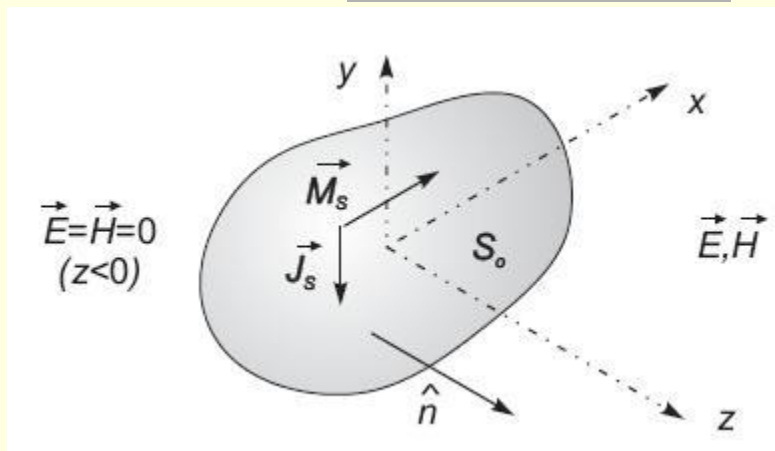
Los campos externos a una superficie arbitraria S_0 pueden hallarse, como es usual, a partir de los potenciales V y **A**. También pueden obtenerse, sin embargo, a partir de corrientes equivalentes establecidas sobre la superficie S_0 (ver figura siguiente), donde **E** y **H** son los campos producidos en S_0 por las



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

fuentes. Como se indica en la figura, hemos sustituido el problema original por otro equivalente, y hemos pasado de las fuentes reales o primarias a otras equivalentes sobre S . Estas corrientes equivalentes sólo son significativas en la apertura S_0 .

Sobre las paredes exteriores de la antenna las corrientes equivalentes coinciden con las



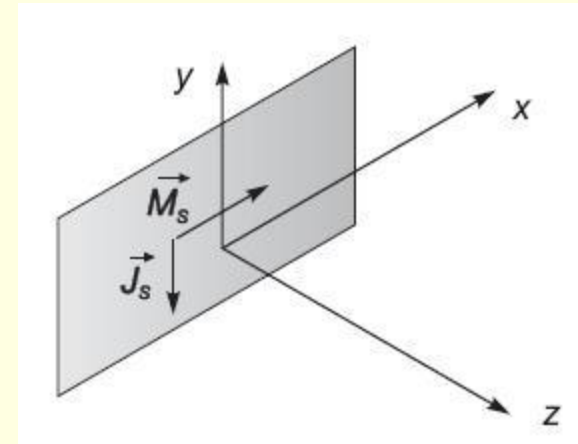
corrientes inducidas sobre el conductor y, al ser mucho menores que las corrientes equivalentes sobre la apertura, su contribución al campo radiado puede despreciarse. Por ello, para calcular el campo radiado se integran las corrientes equivalentes únicamente sobre la apertura S_0 y no sobre el resto de la superficie S , lo cual equivale a considerar solamente la radiación de las corrientes que circulan por el interior de la antena y despreciar las corrientes en el exterior.

A los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} sobre S_0 se les da el nombre de campos primarios o iluminantes, a las corrientes \vec{J}_s y \vec{M}_s el de corrientes equivalentes o fuentes de Huygens, y a la superficie S_0 el de superficie de Huygens.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

En la figura se representa la apertura equivalente al problema original de la boca de una guía rectangular.

A partir del conocimiento de las corrientes equivalentes podremos calcular los campos en cualquier punto del espacio mediante las expresiones de las ecuaciones de Maxwell simétricas. El teorema de equivalencia nos garantiza la validez de los resultados en el exterior de la antena.



Hay situaciones en las que es difícil conocer con exactitud los campos que realmente existen en la apertura. Este puede ser el caso de la boca de guía abierta en el plano $z = 0$. *En efecto, los campos* en el interior de una guía rectangular infinita son perfectamente conocidos, pero cuando la guía se interrumpe bruscamente, en la sección del corte aparece una distribución residual de campos eléctricos y magnéticos que se superpone a la distribución original para cumplir las condiciones de contorno en la zona de la discontinuidad. En estos casos es habitual aproximar la distribución real de campos por los de la guía infinita. En la mayoría de situaciones esta aproximación permite obtener resultados precisos. Con todo hay que tener en cuenta que, dado que el teorema de equivalencia está siendo aplicado a unos campos aproximados,

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

el resultado también lo será.

Con la introducción de las fuentes equivalentes S_0 las integrales definidas en las transparencias 38 y 44 del tema 1 pueden ser utilizadas para encontrar los potenciales A y F en cualquier punto del espacio exterior a la superficie. Estas soluciones de los potenciales, introducidas en las expresiones que relacionan los potenciales con sus campos nos dan **E** y **H** en el punto considerado.

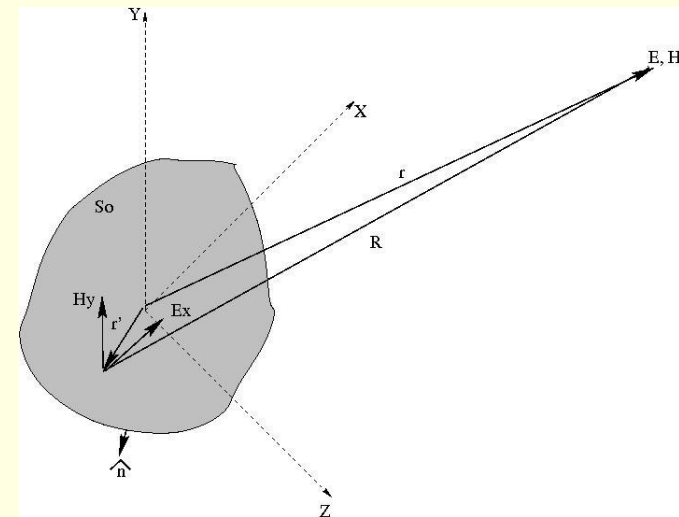
Supongamos ahora una apertura S_0 como la mostrada en la figura en donde los campos iluminantes son conocidos (E_x , H_y)

$$\vec{E} = E_x \hat{i} \quad ; \quad \vec{H} = H_y \hat{j} = \frac{E_x}{Z_0} \hat{j}$$

Las corrientes equivalentes, vienen dadas por

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} = \hat{z} \times \left(\frac{E_x}{Z_0} \right) \hat{j} = - \left(\frac{E_x}{Z_0} \right) \hat{i}$$

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E} = -\hat{z} \times E_x \hat{i} = -E_x \hat{j}$$



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

A partir de las densidades de corrientes pueden obtenerse los vectores de radiación

$$\begin{aligned} N_x &= \iint_{S_0} \left(-\frac{E_x}{Z_0} \right) e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' \\ L_y &= \iint_{S_0} (-E_x) e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} N_\theta &= N_x \cos \theta \cos \phi, & N_\phi &= -N_x \sin \phi \\ L_\theta &= L_y \cos \theta \sin \phi, & L_\phi &= L_y \cos \phi \end{aligned}$$

De los vectores de radiación podemos obtener los campos de radiación

$$\begin{aligned} E_\theta &= j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(1 + \frac{\eta}{Z_0} \cos \theta \right) \cos \phi \iint_{S_0} E_x e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' \\ E_\phi &= -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\frac{\eta}{Z_0} + \cos \theta \right) \sin \phi \iint_{S_0} E_x e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' \end{aligned} \quad \text{con } k_x = k \sin \theta \cos \phi \text{ y } k_y = k \sin \theta \sin \phi$$

La densidad de potencia viene dada por $\mathcal{P} = \frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{\eta}$ y la potencia total radiada

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{Re} \left[\vec{E}(\theta, \phi) \times \vec{H}^*(\theta, \phi) \right] \cdot \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{\eta} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[|E_\theta(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi(\theta, \phi)|^2 \right] r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Es habitual que la fase de los campos en la apertura sea constante, por lo que el máximo de la radiación se dará en direcciones perpendiculares a la misma, por lo que

$$|E_{\max}| = \sqrt{|E_{\theta}|^2 + |E_{\phi}|^2} = \frac{1}{2\lambda r} \left(\frac{\eta}{Z_0} + 1 \right) \left(\left| \iint_{S_0} E_x(x', y') dx' dy' \right|^2 + \left| \iint_{S_0} E_y(x', y') dx' dy' \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y la directividad

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{1}{4} \frac{Z_0}{\eta} \left(\frac{\eta}{Z_0} + 1 \right)^2 \frac{\left| \iint_{S_0} E_x(x', y') dx' dy' \right|^2 + \left| \iint_{S_0} E_y(x', y') dx' dy' \right|^2}{\iint_{S_0} \left(|E_x(x', y')|^2 + |E_y(x', y')|^2 \right) dx' dy'} \approx \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \iint_{S_0} E_x(x', y') dx' dy' \right|^2 + \left| \iint_{S_0} E_y(x', y') dx' dy' \right|^2}{\iint_{S_0} \left(|E_x(x', y')|^2 + |E_y(x', y')|^2 \right) dx' dy'}$$

Donde se hace uso de que $Z_0 \sim \eta$ para antenas eléctricamente grandes.

Es habitual introducir el concepto de eficiencia de iluminación, parámetro que relaciona el área efectiva con el área geométrica. Éste parámetro expresa la uniformidad de la distribución de campos en la apertura y es una medida de la utilización eficiente de toda la superficie de la apertura.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$A_{ef} = A_{geom} \eta_{il}$$

Donde

$$\eta_{il} = \frac{A_{ef}}{A_{geo}} = \frac{1}{S_0} \frac{\left| \iint_{S_0} E_x(x', y') dx' dy' \right|^2 + \left| \iint_{S_0} E_y(x', y') dx' dy' \right|^2}{\iint_{S_0} \left(|E_x(x', y')|^2 + |E_y(x', y')|^2 \right) dx' dy'}$$

Para el caso de una distribución uniforme, $\vec{E}(x, y) = E_1 \hat{i} + E_2 \hat{j}$ se tiene

$$\eta_{il} = \frac{E_1^2 S_0^2 + E_2^2 S_0^2}{(E_1^2 + E_2^2) S_0^2} = 1$$

Apertura elemental.

Supongamos una apertura que ocupa una superficie de dimensiones mucho menores que la longitud de onda de la señal ΔS . En esta apertura podemos suponer que los campos son uniformes y correspondientes a ondas planas $E_x = E_0$, $Z_0 = \eta$

De la expresión de los campos vista anteriormente, los campos en una apertura

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

vienen dados por

$$\left. \begin{aligned} E_{\theta} &= j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(1 + \frac{\eta}{Z_0} \cos \theta \right) \cos \phi \iint_{S_0} E_x e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' \\ E_{\phi} &= -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\frac{\eta}{Z_0} + \cos \theta \right) \sin \phi \iint_{S_0} E_x e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} E_{\theta} &= j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) E_0 \cos \phi \Delta S \\ E_{\phi} &= -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) E_0 \sin \phi \Delta S \end{aligned}$$

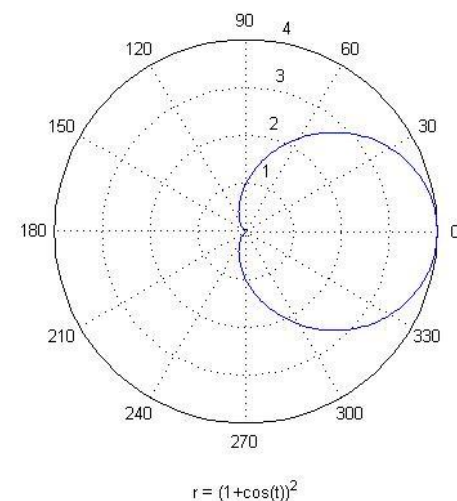
La intensidad de radiación vendrá dada por $K = \frac{E_0^2 (\Delta S)^2}{\eta 4 \lambda^2} (1 + \cos \theta)^2 = \frac{E_0^2 (\Delta S)^2}{\eta \lambda^2} \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)$ y cuya representación corresponde a una cardioide

La potencia total radiada será

$$P_{rad} = \frac{4\pi}{3} \frac{E_0^2 (\Delta S)^2}{\lambda^2 \eta}$$

y una directividad de $D=3$.

Esta directividad puede interpretarse como la combinación ortogonal de un dipolo elemental eléctrico y uno magnético.



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Apertura rectangular uniforme.

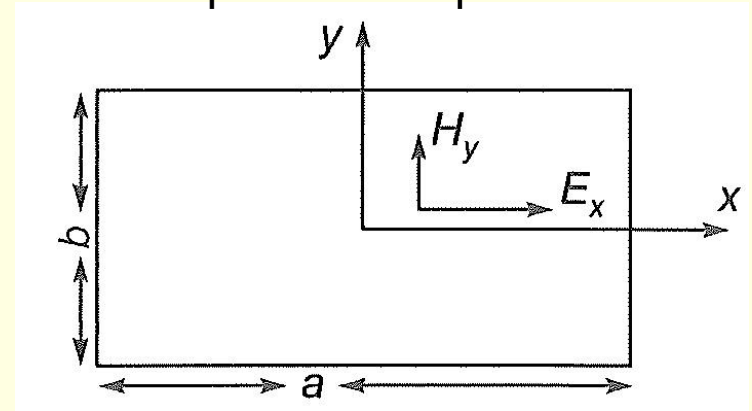
Consideremos el caso simple idealizado de la abertura rectangular de la figura, excitada por una onda plana uniforme en fase y amplitud y con el campo definido por

$$\vec{E} = E\hat{x} \quad ; \quad |x| \leq \frac{a}{2} \quad ; \quad |y| \leq \frac{b}{2}$$

las corrientes equivalentes en la abertura son

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} = -\frac{E}{Z_0} \hat{x}$$

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E} = -E\hat{y}$$



teniendo en cuenta las coordenadas esféricas así como la aproximación de campo lejano

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}$$

$$\vec{R} \approx \vec{r} - \hat{r} \cdot \vec{r}' \Rightarrow |\vec{R}| \approx r - \sin\theta (x' \cos\phi + y' \sin\phi)$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

El potencial vector A y F toma el valor

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_0 E}{4\pi\eta r} (ab) e^{-jkr} \left[\frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi\right)}{\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi\right)} \right] \left[\frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin\theta \sin\phi\right)}{\left(\frac{kb}{2} \sin\theta \sin\phi\right)} \right] \hat{x}$$
$$\vec{F}(r, \theta, \phi) = -\frac{\varepsilon_0 E}{4\pi r} (ab) e^{-jkr} \left[\frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi\right)}{\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi\right)} \right] \left[\frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin\theta \sin\phi\right)}{\left(\frac{kb}{2} \sin\theta \sin\phi\right)} \right] \hat{y}$$

Por lo que los campos eléctricos y magnéticos en un punto en zona lejana vienen dados por

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = \frac{jkE}{4\pi r} ab (1 + \cos\theta) e^{-jkr} \left[\frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi\right)}{\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi\right)} \right] \left[\frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin\theta \sin\phi\right)}{\left(\frac{kb}{2} \sin\theta \sin\phi\right)} \right] (\cos\phi\hat{\theta} - \sin\phi\hat{\phi}) ; \quad \vec{H} = \frac{\vec{E}}{\eta}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Particularizando a los dos planos principales se tiene

Plano E (plano que contiene el campo E y la dirección de máxima radiación)

Para este plano, $\phi = 0, \pi$, por lo que


$$|E_\theta| = \left| \frac{jkE_0}{2\pi r} (ab) e^{-jkr} \left[\frac{(1+\cos\theta)}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)}{\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)} \right) \right] \right|_{\phi=0,\pi} = \frac{kE_0}{2\pi r} (ab) \frac{(1+\cos\theta)}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)}{\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)} \right); \quad E_\phi = 0$$

Plano H (plano que contiene el campo H y la dirección de máxima radiación)

Para este plano, $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ por lo que

$$|E_\phi| = \left| \frac{jkE_0}{2\pi r} (ab) e^{-jkr} \left[\frac{(1+\cos\theta)}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)}{\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)} \right) \right] \right|_{\phi=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}} = \frac{kE_0}{2\pi r} (ab) \frac{(1+\cos\theta)}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)}{\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)} \right); \quad E_\theta = 0$$

Los ceros de radiación se obtienen de los ceros de ambas funciones.

Para el plano E  $\frac{ka}{2}\sin\theta_{c_n} = n\pi \Rightarrow$ El primer cero se localiza en $\theta_{c_1} = \arcsen\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

- El primer cero aparece para $\lambda=a$ y $\theta_{c_1} = \pi$
- si $a \gg \lambda$ entonces $\theta_{c_1} = \lambda/a$ y el ancho de haz entre nulos es $\Delta\theta_c = 2\lambda/a$

Los puntos de potencia mitad se obtienen de $\sin \theta_{-3dB}/2 = \pm 0,44\pi$ y el ancho de haz resultante es $\Delta\theta_{-3dB} = 0,88\lambda/a$. *El nivel de lóbulo principal a secundario es de 13,2 dB. Para el plano H se obtienen expresiones similares con a sustituido por b.*

En general, para aperturas grandes en términos de la longitud de onda, resultan unos anchos de haz del orden de λ/a y λ/b en cada plano principal.

Con respecto al área efectiva,

$$A_{ef} = A_{geom} \eta_{il}$$

Para el caso de una apertura con iluminación uniforme, $\eta_{il} = 1$, por lo que el área efectiva vale

$$A_{ef} = A_{geom} \eta_{il} = a \times b$$

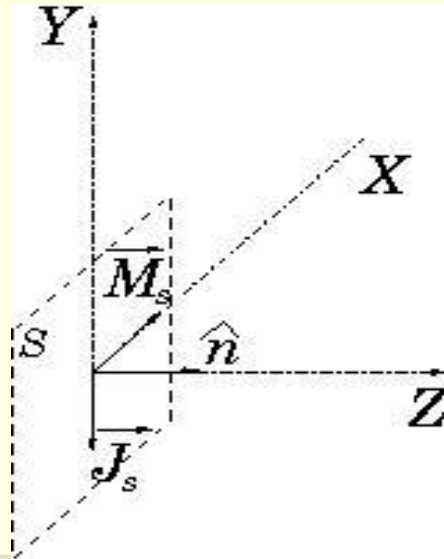
A partir del área efectiva, la directividad vale:

$$A_{ef} = D \frac{\lambda^2}{4\pi} \Rightarrow D = \frac{4\pi ab}{\lambda^2}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Apertura iluminada con el modo TE_{10}

Cualquier otra forma de iluminación, distinta de la uniforme, puede ser analizada de la misma manera utilizando las expresiones conocidas para distribuciones unidimensionales; es un caso de gran interés la iluminación producida en una boca de guía por un modo dominante TE_{10} . Despreciando los campos en las superficies conductoras externas de la antena y suponiendo que la distribución de campo en la abertura es esencialmente la misma que hay en la sección transversal de la guía, los campos tangenciales en la abertura ($z=0$) son, a partir de las expresiones conocidas para el modo TE_{10}



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$\left. \begin{aligned}
 E_x &= \frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \Big|_{m=1, n=0} \\
 E_y &= -\frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \Big|_{m=1, n=0} \\
 H_x &= \frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \Big|_{m=1, n=0} \\
 H_y &= \frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \Big|_{m=1, n=0} \\
 H_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\gamma z} \Big|_{m=1, n=0}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned}
 E_x &= 0 \\
 E_y &= -\frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{\pi}{a} \right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\
 H_x &= \frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) = -\frac{E_0}{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\
 H_y &= 0 \\
 H_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)
 \end{aligned}$$

Así pues, las densidades de corriente eléctricas y magnéticas equivalentes sobre la apertura, vienen dadas por

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E}_1 = -\hat{z} \times \hat{y} \quad E_y|_{z=0} = \hat{x} E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_1 = \hat{z} \times \hat{x} \quad H_x|_{z=0} = -\hat{y} \frac{E_0}{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

A partir de la distribuciones equivalentes de corrientes, se pueden obtener los vectores de radiación (o los potenciales **A** y **F**)

$$\vec{N} = \int_{S'} \vec{J}_s(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dS' = N_r \hat{r} + N_\theta \hat{\theta} + N_\phi \hat{\phi}$$

$$\vec{L} = \int_{S'} \vec{M}_s(\vec{r}') e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}'} dS' = L_r \hat{r} + L_\theta \hat{\theta} + L_\phi \hat{\phi}$$

Y a partir de los vectores de radiación, podemos obtener los campos de radiación mediante las relaciones

$$E_\theta = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} [\eta N_\theta + L_\phi] \quad , \quad H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta}$$

$$E_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} [\eta N_\phi - L_\theta] \quad , \quad H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta}$$

Por lo que para nuestra boca de guía iluminada con un modo TE₁₀ los campos de radiación toman los valores

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$E_{\theta} = j \frac{abE_0 e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2} \cos \theta \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin \phi \left(\frac{\cos \left(k \frac{a}{2} \sin \theta \cos \phi \right)}{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(k \frac{a}{2} \sin \theta \cos \phi \right)^2 \right)} \right) \left(\frac{\sin \left(k \frac{b}{2} \sin \theta \sin \phi \right)}{k \frac{b}{2} \sin \theta \sin \phi} \right)$$
$$E_{\phi} = j \frac{abE_0 e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\cos \theta + \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \phi \left(\frac{\cos \left(k \frac{a}{2} \sin \theta \cos \phi \right)}{\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(k \frac{a}{2} \sin \theta \cos \phi \right)^2 \right)} \right) \left(\frac{\sin \left(k \frac{b}{2} \sin \theta \sin \phi \right)}{k \frac{b}{2} \sin \theta \sin \phi} \right)$$

Para una boca de guía monomodo se tiene un haz muy ancho y poca directividad. Por ejemplo, para una guía estándar en banda X (designada por las siglas *WR90* o *RG52/U*) cuyas dimensiones internas son $a = 22,8 \text{ mm}$, $b = 10,2 \text{ mm}$, se obtiene a 10 GHz, partiendo de las expresiones anteriores,

$$\Delta\theta_{-3dB}^E = 120^\circ \quad ; \quad \Delta\theta_{-3dB}^H = 80^\circ$$

y una directividad $D=4.1$ (6dB). Estos valores son aproximados, dado que el modelo no considera ni las corrientes sobre las paredes exteriores de la guía ni la reflexión producida en la boca, cuyo efecto relativo puede ser importante dadas las dimensiones eléctricas reducidas de la apertura.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Cuando $a, b > \lambda$, se tiene

$$\Delta\theta_{-3dB}^E = 50 \left(\frac{\lambda}{b} \right) (\text{grados}) ; \Delta\theta_{-3dB}^H = 67 \left(\frac{\lambda}{a} \right) (\text{grados})$$

$$NLPS^E = 13.2 \text{ dB} ; NLPS^H = 23 \text{ dB}$$

$$D = 10.2 \frac{ab}{\lambda^2} ; \eta_{il} = 0.81$$

En general se obtienen anchos de haz distintos en el plano E y en el plano H. Pueden conseguirse diagramas aproximadamente iguales en ambos planos si se tiende hacia la relación $a/b \approx \pi/2$

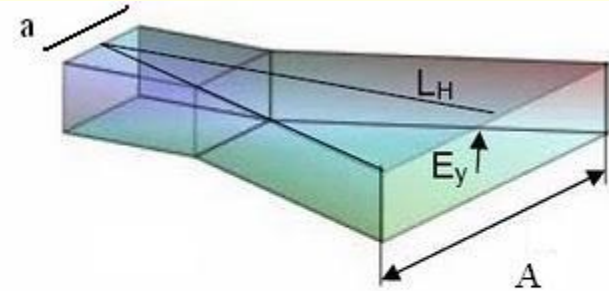
4.- Antenas de bocina. Bocinas sectoriales y piramidales

Las bocinas surgen como solución a los problemas de desadaptación entre las bocas de guías monomodo y el espacio libre a parte de mejorar la directividad de las mismas. El objetivo de las bocinas es conseguir un agrandamiento de la boca de una forma gradual para que la estructura siga siendo monomodo teniendo a su vez una apertura de dimensiones eléctricas mayores y una impedancia de guía próxima a la del vacío.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

La guía rectangular está asociada a los siguientes tipos de bocinas:

- Bocinas sectoriales
 - ✓ Bocinas de plano E
 - ✓ Bocinas de plano H
- Bocina piramidal



La geometría de una bocina sectorial en plano H es la mostrada en la figura.

Al entrar los campos en la bocina desde la guía, se va formando un frente de onda cilíndrico que cuando llega a la boca de la apertura tiene radio L_H , pero al alejarnos de la apertura hacia los extremos según el eje x el frente de onda que llega tendrá radio $R(x)$. De este modo los campos en la boca de la bocina no están en fase. Esta diferencia de fase en función del alejamiento x del centro de la apertura será proporcional a la diferencia de caminos, esto es,

$$\beta(R(x) - L_H) = \beta\left(\sqrt{x^2 + L_H^2} - L_H\right) \approx \beta\left[L_H\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L_H}\right)^2\right) - L_H\right] = \beta\frac{x^2}{2L_H}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Si suponemos que la guía de ondas transmite en el modo fundamental TE_{10} , la distribución de los campos en la boca de la bocina será:

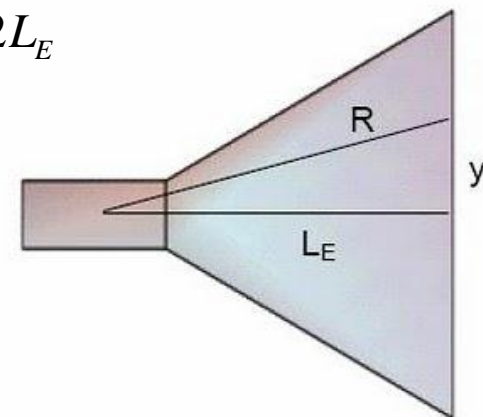
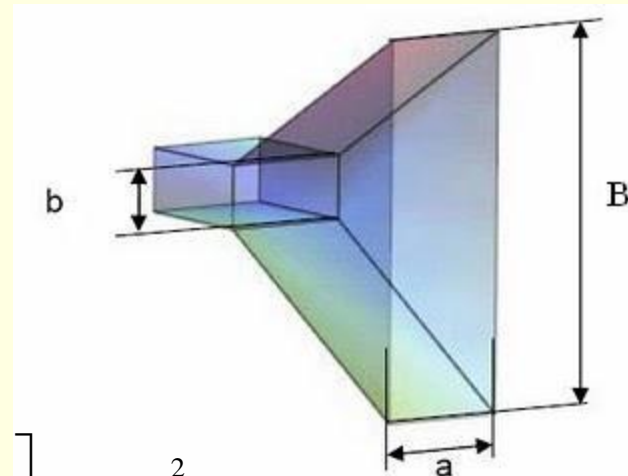
$$\vec{E} = E_y \hat{j} = \hat{j} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{A} x\right) e^{-j\beta \frac{x^2}{2L_H}}$$

Para el caso de una antena sectorial en plano E como la mostrada en la figura, la diferencia de fase vendrá dada por:

$$\beta(R(x) - L_E) = \beta\left(\sqrt{y^2 + L_E^2} - L_E\right) \approx \beta\left[L_E\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{L_E}\right)^2\right) - L_E\right] = \beta \frac{y^2}{2L_E}$$

y los campos en la boca de la bocina

$$\vec{E} = E_y \hat{j} = \hat{j} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) e^{-j\beta \frac{y^2}{2L_E}}$$

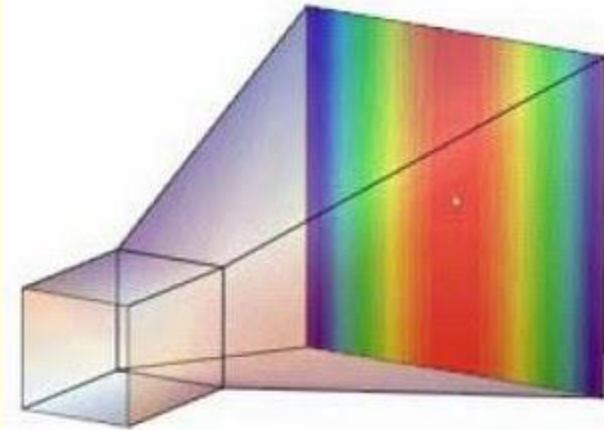


Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

En una bocina de forma piramidal aumentan las dimensiones horizontales y verticales de la bocina, el error de fase aparece en ambos planos y los campos serán

$$\vec{E} = E_y \hat{j} = \hat{j} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{A} x\right) e^{-j\beta \frac{x^2}{2L_H}} e^{-j\beta \frac{y^2}{2L_E}}$$

Una vez obtenida la distribución de campos en la apertura (campos iluminantes) los campos de radiación viene dados, según el tipo de bocina:



✓ Bocina en plano E

$$E_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(1 + \frac{\eta}{Z_0} \cos \theta\right) \cos \phi \iint_{S_0} E_x e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(1 + \frac{\eta}{Z_0} \cos \theta\right) \cos \phi \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-a/2}^{a/2} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j\beta \frac{y'^2}{2L_E}} e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

$$E_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\frac{\eta}{Z_0} + \cos \theta\right) \sin \phi \iint_{S_0} E_x e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy' = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left(\frac{\eta}{Z_0} + \cos \theta\right) \sin \phi \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-a/2}^{a/2} E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) e^{-j\beta \frac{y'^2}{2L_E}} e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} dx' dy'$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

En la dirección de máxima radiación ($\theta=0$), los campos radiados valen

$$|E_{rad}(\theta=0)| = \frac{E_0}{2\lambda r} \left(\frac{\eta}{Z_0} + 1 \right) \left| \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{\pi}{a} x'\right) dx' \right| \left| \int_{-B/2}^{B/2} e^{-j\beta \frac{y'^2}{2L_E}} dy' \right|$$

Esta última integral, conocida como integral de Fresnel, puede evaluarse si suponemos, como en la mayoría de los casos, que $\beta = k$ y $Z_0 = \eta$. Haciendo el cambio de variable

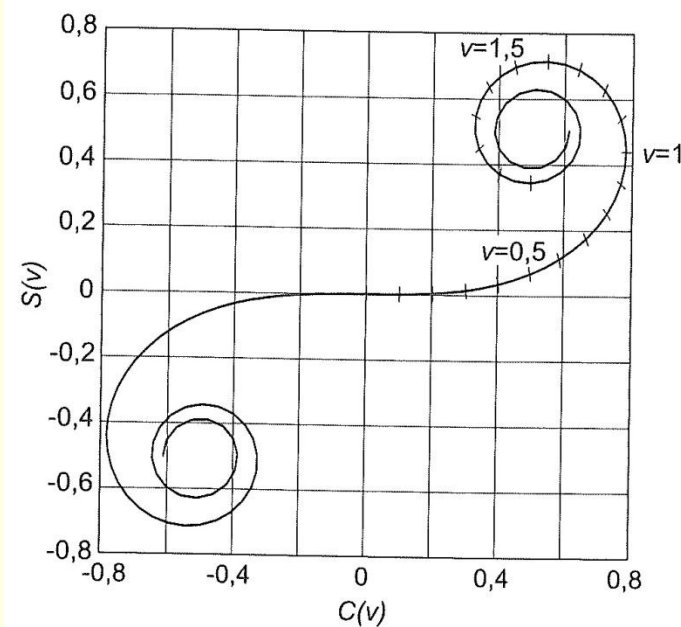
$$u^2 = 2y'^2 / (\lambda L_E)$$

$$\int_{-B/2}^{B/2} e^{-j\beta \frac{y'^2}{2L_E}} dy' = \int_{-B/2}^{B/2} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y'^2}{2L_E}} dy' = 2\sqrt{\frac{\lambda L_E}{2}} \int_0^{\frac{B}{\sqrt{2\lambda L_E}}} e^{-j \frac{\pi}{2} u^2} du$$

La integral de Fresnel se define como $\left(v = \frac{B}{\sqrt{2\lambda L_E}} \right)$

$$\int_0^v e^{-j \frac{\pi}{2} u^2} du = \int_0^v \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du - j \int_0^v \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du = C(v) - jS(v)$$

cuya representación en el plano complejo se conoce como espiral de Cornu.



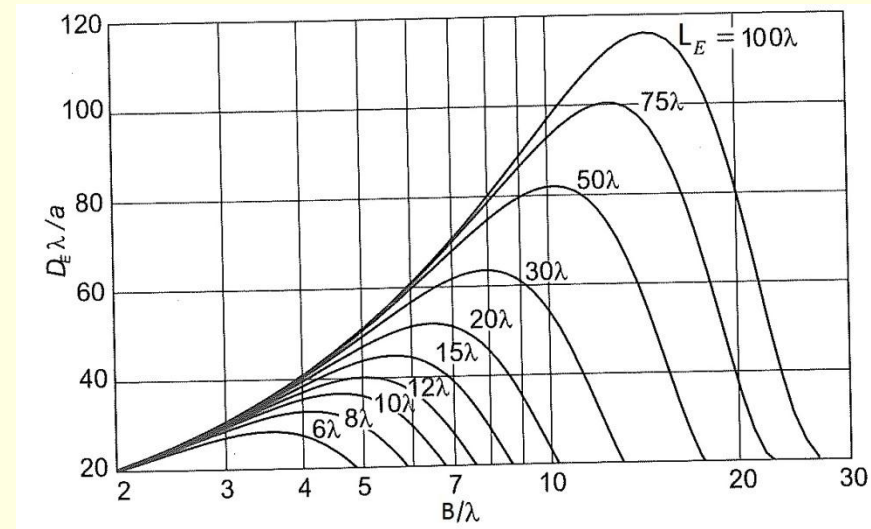
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

La densidad de potencia radiada en la dirección de máxima radiación viene dada por

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{|E_{\max}|^2}{\eta} = \frac{8E_0^2 a^2 L_E}{\eta \pi^2 \lambda r^2} \left[C^2 \left(\frac{B}{\sqrt{2\lambda L_E}} \right) + S^2 \left(\frac{B}{\sqrt{2\lambda L_E}} \right) \right]$$

La directividad vendrá dada por

$$D_E = \frac{64aL_E}{\pi\lambda B} \left[C^2 \left(\frac{B}{\sqrt{2\lambda L_E}} \right) + S^2 \left(\frac{B}{\sqrt{2\lambda L_E}} \right) \right]$$



Representando la directividad en función del tamaño eléctrico de la apertura, puede verse que para cada longitud de la bocina existe una bocina óptima en términos de la directividad cuyo máximo puede obtenerse mediante la expresión

$$B_{opt} = \sqrt{2\lambda L_E}$$

que corresponde a una diferencia de fase máxima de $\lambda/4$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

De las curvas puede obtenerse que para el diseño óptimo se tiene

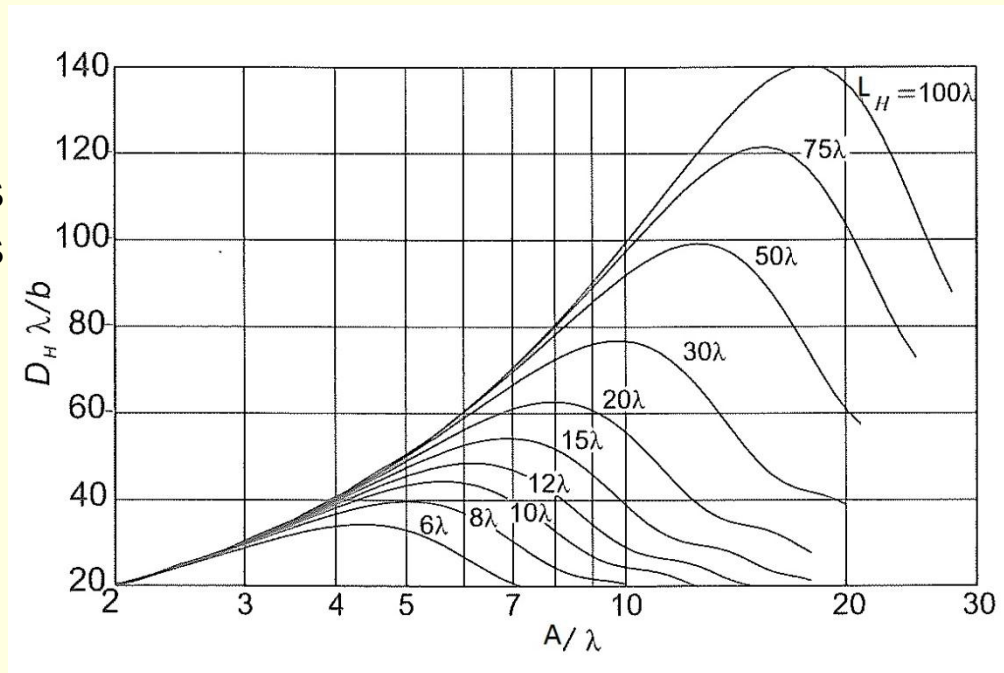
$$\Delta\theta_{-3dB}^E = 56 \frac{\lambda}{B} (\text{grados}) \quad ; \quad \Delta\theta_{-3dB}^H = 67 \frac{\lambda}{a} (\text{grados})$$

$$NLPS^E = 10\text{dB} \quad ; \quad NLPS^H = 23\text{dB}$$

$$D = 8 \frac{aB}{\lambda^2} \quad : \quad \eta_{il} = 0.64$$

✓ Bocina en plano H

De igual forma se obtendrían los campos y la directividad cuya gráfica es la mostrada en la figura



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

De igual forma, puede observarse que existe una bocina óptima en la que el máximo viene dado por

$$A_{opt} = \sqrt{3\lambda L_H}$$

que se corresponde con un error de fase máximo de $\frac{3\lambda}{8}$. Para el diseño óptimo se tiene

$$\Delta\theta_{-3dB}^E = 50 \frac{\lambda}{b} (\text{grados}) \quad ; \quad \Delta\theta_{-3dB}^H = 78 \frac{\lambda}{A} (\text{grados})$$

$$NLPS^E = 13dB \quad ; \quad NLPS^H = 12dB$$

$$D = 7.9 \frac{Ab}{\lambda^2} \quad : \quad \eta_{il} = 0.62$$

✓ Bocina piramidal

Para la bocina piramidal se tiene que la directividad es aproximadamente el producto de una bocina de plano E y la de una bocina de plano H, esto es,

$$D_{piramidal} = \frac{\pi}{32} \left(D_E \frac{\lambda}{A} \right) \left(D_H \frac{\lambda}{B} \right)$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

De la relación anterior y de las eficiencias de iluminación de las bocinas en planos E y H, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{-3dB}^E &= 56 \frac{\lambda}{B} (\text{grados}) & ; & \quad \Delta\theta_{-3dB}^H = 78 \frac{\lambda}{A} (\text{grados}) \\ NLPS^E &= 10dB & ; & \quad NLPS^H = 12dB \\ D &= 6.4 \frac{AB}{\lambda^2} & : & \quad \eta_{il} = 0.51\end{aligned}$$

5.- Antenas reflectoras

La utilización conjunta de antenas y reflectores permite mejorar y optimizar las características de radiación de las antenas, como por ejemplo el NLPS, el área y longitud efectiva, e incluso pueden optimizarse para conseguir unos determinados diagramas o características de radiación.

En la actualidad las aplicaciones de las antenas reflectoras se utilizan en diversos campos tales como en grandes telescopios (prospección cósmica y recepción de fondo de microondas), recepción de señales procedentes de satélites geoestacionarios, etc.

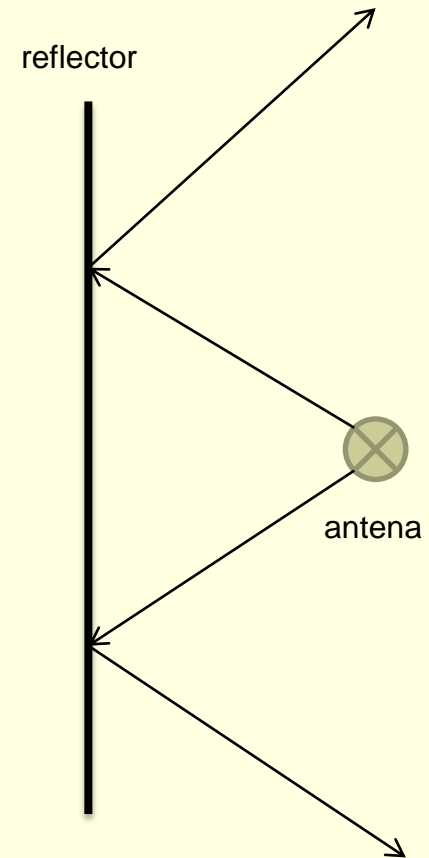
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Los reflectores empezaron a utilizarse de forma intensiva a partir de los desarrollos técnicos realizados en la segunda guerra mundial, especialmente con los sistemas de radar y de comunicaciones a frecuencias de microondas.

5.1- Reflectores planos

Es el tipo de reflector más sencillo y consiste en un plano el cual permite dirigir la energía en una dirección determinada. La disposición es como la mostrada en la figura.

El análisis de este tipo de reflectores se hace de igual forma a como analizamos las antenas lineales, tanto verticales como horizontales, sobre planos conductores perfectos y el efecto que la finitud en el plano así como en su conductividad producía en las características de radiación de la antenas (diagramas de radiación). En su análisis demostramos como mediante el control de la polarización de la antena y la distancia al plano nos permitía modificar las características de radiación, como

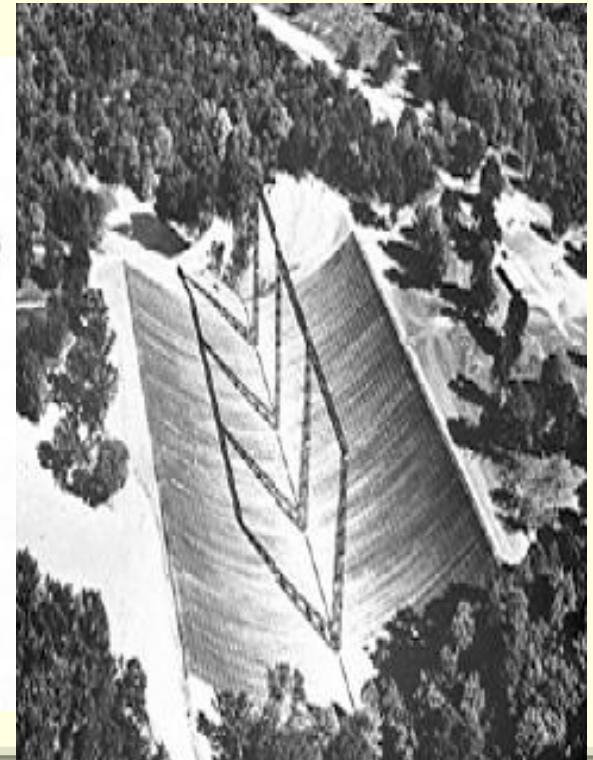
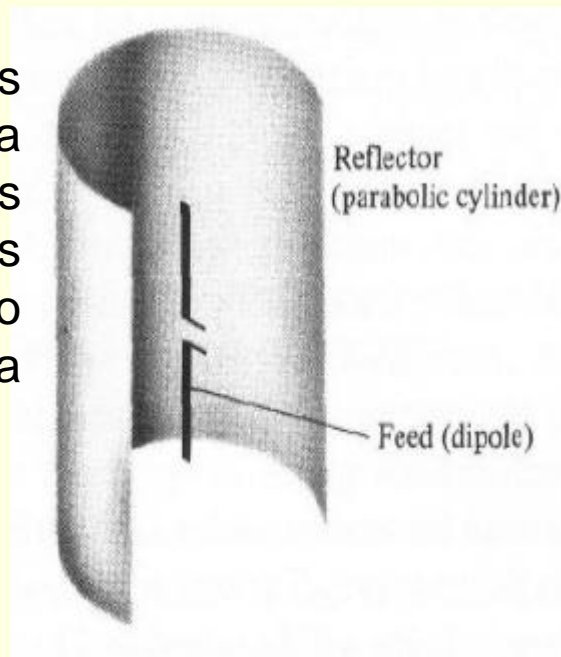


Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

por ejemplo su diagrama, su impedancia, su directividad, etc. Tal y como se hizo en el tema 4, el análisis de este tipo de antenas reflectoras se analiza mediante la teoría de imágenes cuyos resultados, aunque válidos para reflectores planos infinitos, pueden aproximarse para superficies eléctricamente grandes.

5.2- Reflectores diédricos.

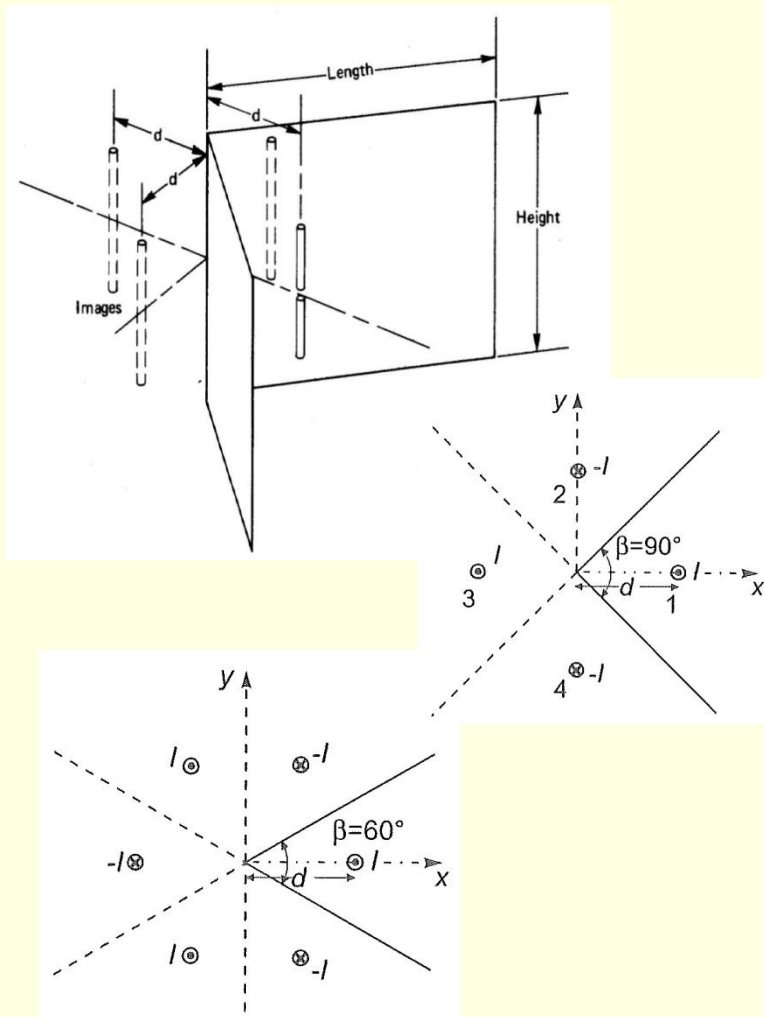
Uno de los métodos más sencillos de concentrar la energía es mediante los reflectores. Estos pueden ser cilíndricos, como los mostrados en la figura adjunta, o planos, como el mostrado en la figura siguiente.



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

La teoría de imágenes usada en los reflectores planos puede usarse también en los reflectores diédricos siempre y cuando el ángulo del diedro sea un divisor entero de 180° . Los reflectores diédricos más usados son los que forman ángulos $\beta=90^\circ$ y los de $\beta=60^\circ$. Para los de 90° , el sistema imagen lo forman 3 antenas imágenes y una real y para los de 60° , lo forman 5 antenas imágenes y una real

Como puede verse, tras aplicar la teoría de imágenes, aparecen un conjunto de antenas imágenes equidistantes dispuestas sobre una circunferencia centrada en el diedro y produciendo interferencias entre los campos creados por el dipolo más los reflejados. El análisis de este conjunto de antenas también puede hacerse mediante técnicas de agrupaciones (arrays).



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Otra forma de plantear el problema es analizando las interferencias creadas entre la antena real y las antenas imágenes. Para el caso de un diedro de 90° la tensión en la antena real vendrá dada por:

$$V_1 = I(Z_{11} - Z_{12} + Z_{13} - Z_{14})$$

El análisis de este problema con el método de las imágenes será exacto siempre y cuando los planos conductores sean infinitos y la antena real esté situada a una distancia de la esquina comprendida entre $0.3\lambda - 0.7\lambda$. Con esta suposición se consiguen directividades sobre el valor de un dipolo aislado de $D = 10$ dB para diedros de 90 grados y $D = 13$ dB para diedros de 60° .

Respecto a los campos radiados, para un diedro de 90° el cual usa como alimentador una antena dipolo $\lambda/2$, el campo eléctrico será:

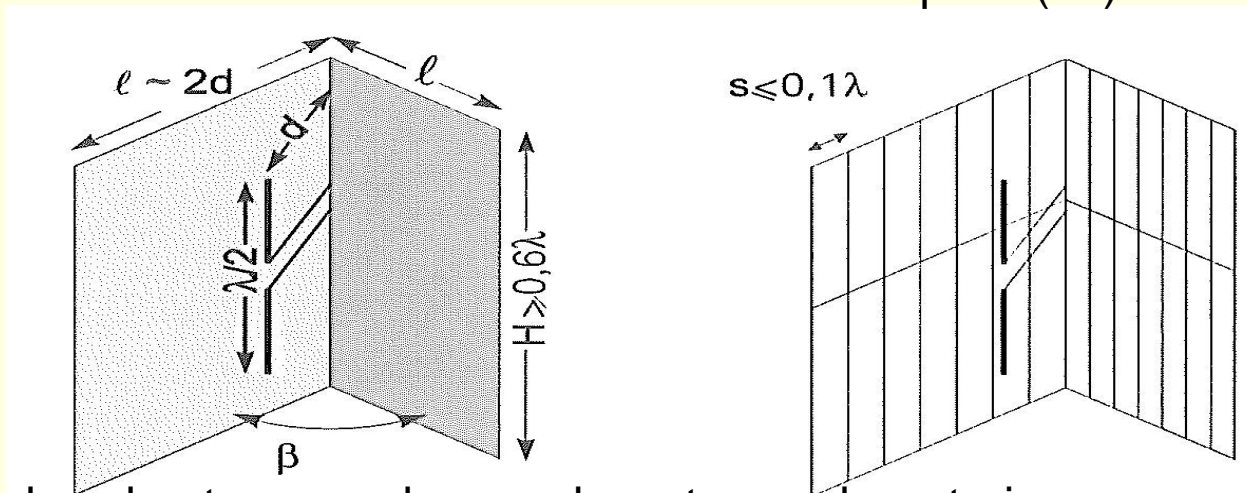
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \left(e^{jk_y d} + e^{-jk_y d} - e^{jk_x d} - e^{-jk_x d} \right) = 2E_0 \left(\cos(k_y d) - \cos(k_x d) \right) = \\ &= 2\vec{E}_0 \left(\cos(kd \sin(\theta) \cos(\phi)) - \cos(kd \sin(\theta) \sin(\phi)) \right)\end{aligned}$$

Con E_0 el campo de un dipolo de media longitud de onda $\vec{E}_0 = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \hat{\theta}$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$E_{\theta} = j60 \frac{e^{-jkr}}{r} I \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} 2 \left(\cos(kd \sin(\theta) \cos(\phi)) - \cos(kd \sin(\theta) \sin(\phi)) \right)$$

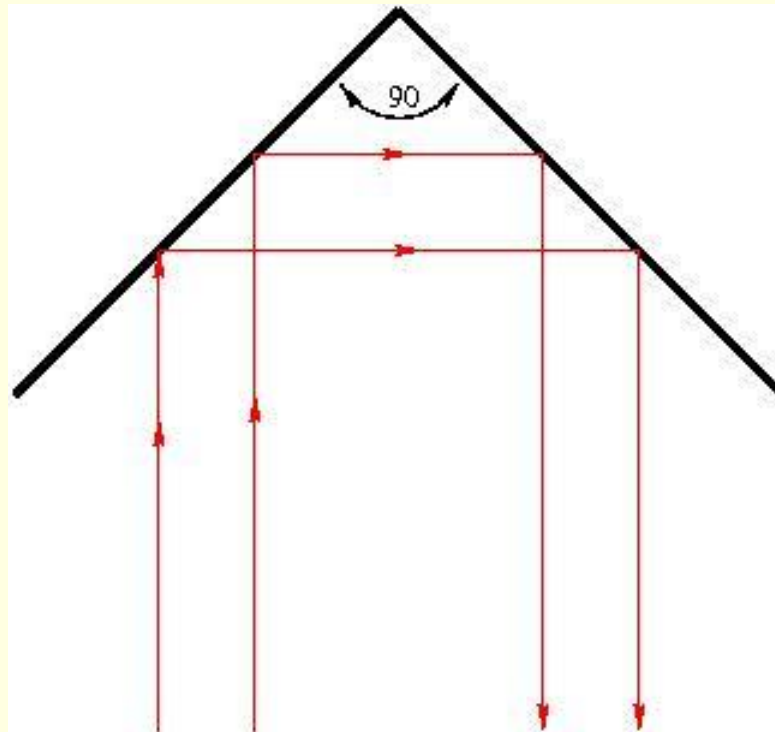
En la práctica, los planos no son infinitos y se suelen construir de tal forma que su longitud sea 2 veces la distancia del alimentador a la esquina (2d).



Por razones de robustez, en el caso de antenas de exteriores, se suele sustituir los planos conductores por un conjunto de varillas (se evita el efecto vela con el viento) cuya separación entre varillas es de $s \leq 0,1$. Estas varillas solo funcionarán como reflectores si la posición de ellas coincide con la polarización vertical de la antena.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

En caso de otro tipo de polarización, las varillas serán transparentes. Este tipo de reflector también puede usarse como reflector pasivo ya que como se muestra en la figura cualquier rayo que llegue al reflector saldrá en la misma dirección que el de incidencia.



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

De esta definición se deducen las siguientes propiedades:

1. La parábola es simétrica respecto a la línea perpendicular a la directriz y que pasa por el foco. A esta línea se le denomina eje de la parábola y al punto de intersección entre eje y la parábola se le denomina vértice.
2. El vértice es el punto de la parábola cuya distancia a la recta directriz es mínima. A la distancia entre el vértice y el foco se le denomina distancia focal (f). Esta distancia focal es la misma entre la recta directriz y el vértice. Como consecuencia de esto se tiene $r' + z = 2f$
3. Los puntos de la parábola equidistan del foco y de la recta directriz, esto es, $r = r'$

A partir de estas propiedades y de la gráfica anterior se puede deducir:

$$r(\theta) = \frac{2f}{1 + \cos(\theta)} = \frac{f}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{Ecuación polar de la parábola}$$

$$y^2 = 4f(f - z) \quad \text{Ecuación cartesiana de la parábola}$$

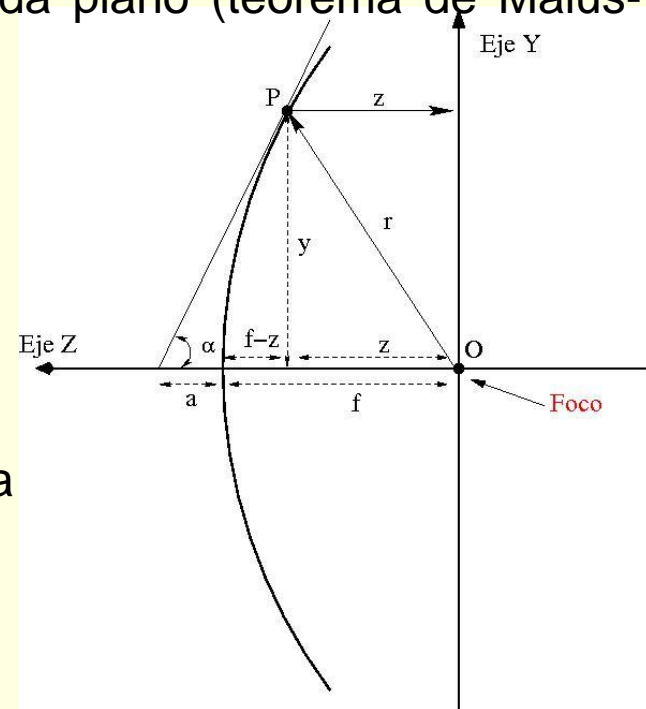
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Mediante un análisis geométrico de la parábola, podemos deducir dos de las características principales de los reflectores parabólicos, esto es, cualquier onda procedente del foco de la parábola (onda primaria) será reflejada (onda secundaria) según las leyes de Snell, con una dirección paralela al eje de la parábola y como consecuencia los caminos recorridos por cada uno de los rayos serán iguales, originándose en la boca de la parábola un frente de onda plano (teorema de Malus-Dupin). Veamos la demostración del teorema de Malus:

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= -\frac{dy}{dz} = \frac{2f}{y} \\ \tan \alpha &= \frac{y}{a + f - z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = f - z$$

La distancia recorrida desde el foco al punto de incidencia (P) es

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} = f + a$$



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

La distancia recorrida desde el foco a la apertura del reflector es

$$r + z = f + a + (f - a) = 2f = cte$$

lo que demuestra el teorema.

Para demostrar que todos los rayos procedentes del reflector salen con direcciones paralelas al eje de la parábola, basta con demostrar que el ángulo de salida es igual a $\beta = \theta/2$ (véase figura en la transparencia 61). Dado que el triángulo APO es isósceles y el ángulo que forma la dirección de incidencia con la normal, β , es el complementaria del ángulo α , por lo que

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) = \frac{\theta}{2}$$

Por último nos falta definir un parámetro muy importante en el diseño de reflectores parabólicos dado que afecta de forma significativa al proceso de fabricación mecánica. Este parámetro es la relación distancia focal al diámetro de la apertura (f/D). Si definimos ahora como ángulo β el ángulo que, respecto al eje, se ve el borde de la parábola, se tiene:

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$\frac{D}{2} = y \Rightarrow f - z = \frac{D^2}{16f}$$

Donde se hace uso de la ecuación cartesiana de la parábola.

Por otra parte:

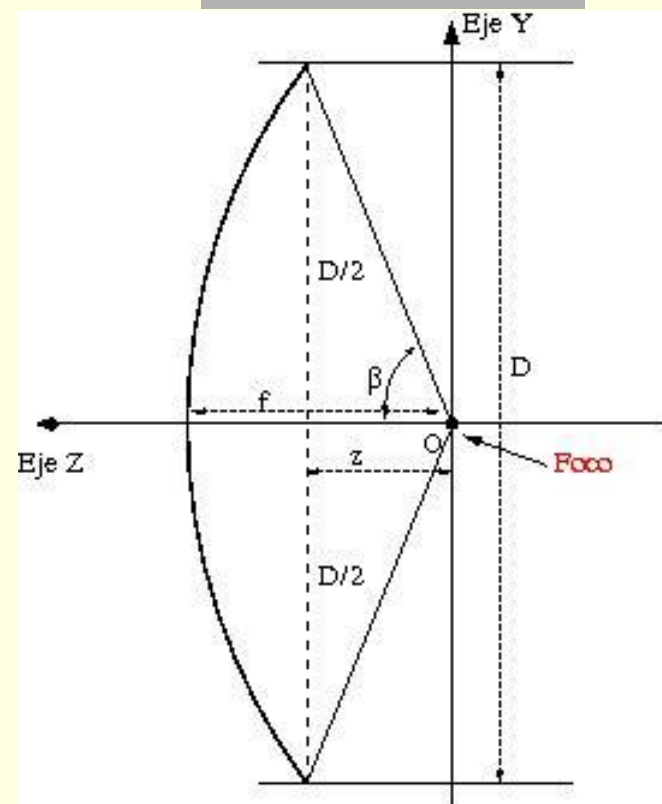
$$\cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{z}{y} = 2 \left(\frac{f}{D} \right) - \frac{1}{8 \left(\frac{f}{D} \right)}$$

y por otra

$$\cot \beta = \csc \beta - \tan \left(\frac{\beta}{2} \right) = 2 \left(\frac{f}{D} \right) + \frac{1}{8 \left(\frac{f}{D} \right)} - \tan \left(\frac{\beta}{2} \right)$$

Igualando ambas expresiones

$$\frac{f}{D} = \frac{1}{4 \tan \left(\frac{\beta}{2} \right)} = \frac{1}{4} \cot \left(\frac{\beta}{2} \right)$$



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Una vez analizado el reflector parabólico desde el punto de vista geométrico, el siguiente paso es el análisis de los campos radiados por el reflector. Para este proceso y para las dimensiones más usuales, el método de análisis es el mismo que el efectuado con las guías, esto es, aplicando el teorema del campo equivalente, sustituiremos la parabólica por un conjunto de corrientes eléctricas y magnéticas en la apertura de la antenna (boca del reflector).

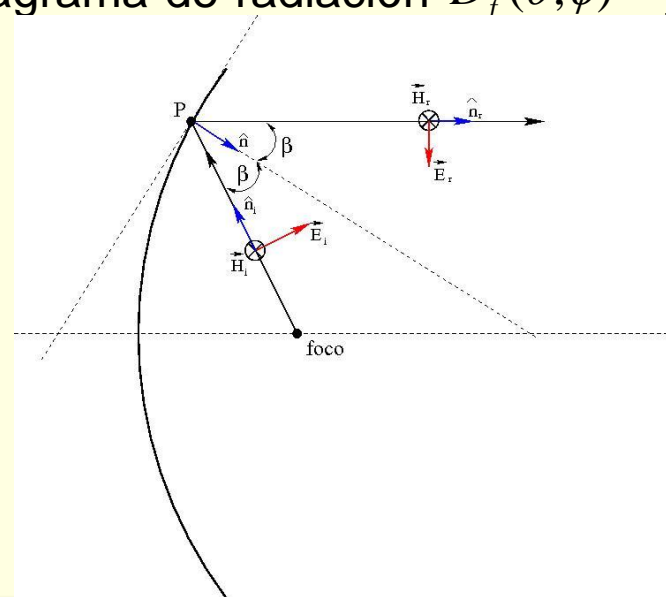
Supongamos que en el foco de la parábola situamos una antenna la cual produce unos campos primarios que vienen descritos mediante su diagrama de radiación $D_f(\theta, \phi)$ y radiando una potencia P_r

La intensidad de radiación en el reflector vendrá dada por

$$K_f = \frac{P_r G_f(\theta, \phi)}{4\pi} = \frac{|\vec{E}_i|^2}{\eta} r^2$$

por lo que el campo incidente puede ser expresado como

$$|\vec{E}_i| = \frac{\eta K_f}{r^2} \Rightarrow \vec{E}_i = \sqrt{\frac{\eta P_r G_f(\theta, \phi)}{4\pi}} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{e}_i$$



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Donde se ha supuesto que la distancia focal $f \gg \lambda$ (reflector situado en zona de campo lejano) y que el radio del reflector es mucho mayor que λ (consideramos que la curvatura del reflector es en primera aproximación plana).

Aplicando las condiciones de contorno sobre la superficie del reflector así como la incidencia de una onda plana (campo lejano), se tiene,

$$\hat{n} \times (\vec{E}_i + \vec{E}_r) = 0 \quad ; \quad \vec{H}_i = \frac{\hat{n}_i \times \vec{E}_i}{\eta} \quad ; \quad \vec{H}_r = \frac{\hat{n}_r \times \vec{E}_r}{\eta}$$

Dado que después de la reflexión en la superficie del reflector, el campo secundario viaja en forma de onda plana, la distribución de campos en la boca del reflector (apertura) se traslada sin error de fase apreciable, por lo que

$$\vec{E}_a = \vec{E}_r e^{-jkz} = \sqrt{\frac{\eta P_r G_f(\theta, \phi)}{4\pi}} \frac{e^{-jk(r+z)}}{r} \hat{e}_r = \sqrt{\frac{\eta P_r G_f(\theta, \phi)}{4\pi}} \frac{e^{-2jkf}}{r} \hat{e}_r$$

donde se ha aplicado el teorema de Malus-Dupin ($r+z=2f$) y la dirección de la onda reflejada puede obtenerse como $\hat{e}_r = 2(\hat{n} \cdot \hat{e}_i) \hat{n} - \hat{e}_i$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Aplicando el teorema del campo equivalente y haciendo uso de la mismas técnicas usadas para las aperturas, el campo radiado por el reflector viene dado por

$$E_{\theta} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) \iint_{S'} [E_x^a \cos \phi + E_y^a \sin \phi] e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dS'$$

$$E_{\phi} = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) \iint_{S'} [E_x^a \sin \phi + E_y^a \cos \phi] e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dS'$$

donde E_x^a y E_y^a son las proyecciones del campo en la apertura sobre los eje x e y respectivamente.

Por último, veamos algunos parámetros que mayor influencia presentan en el diseño de antenas reflectoras.

Ley de la iluminación

Las ondas esféricas que se propagan desde el foco al reflector, su módulo presentará un decaimiento proporcional al inverso de la distancia recorrida de modo que la distribución de campos en la apertura dependerá de los siguientes factores:

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

- Diferencia de caminos recorridos hasta que el rayo es reflejado
- Atenuación debida al diagrama de radiación del alimentador (antena situada en el foco de la parábola)

El campo en la dirección del eje z recorre una distancia igual a la distancia focal por lo que su decaimiento será proporcional a $1/f$.

La atenuación en función del ángulo polar puede obtenerse de

$$\tau = 20 \log \left(\frac{E'_a}{E_a} \right) = 20 \log \left(\frac{\frac{\sqrt{G(\theta, \phi)}}{r'}}{\frac{1}{f}} \right) = 20 \log \left(\frac{f}{r'} \right) + 20 \log \sqrt{G(\theta, \phi)}$$

Haciendo uso de la ecuación polar de la parábola,

$$\tau = 20 \log \left(\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + 20 \log \sqrt{G(\theta, \phi)}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Como puede verse, al aumentar el decaimiento, la distribución de campos presenta una discontinuidad mas suave en los extremos lo que implica diagramas de radiación secundarios con lóbulos más bajos y por consiguiente un aumento de la NLPS

Eficiencias

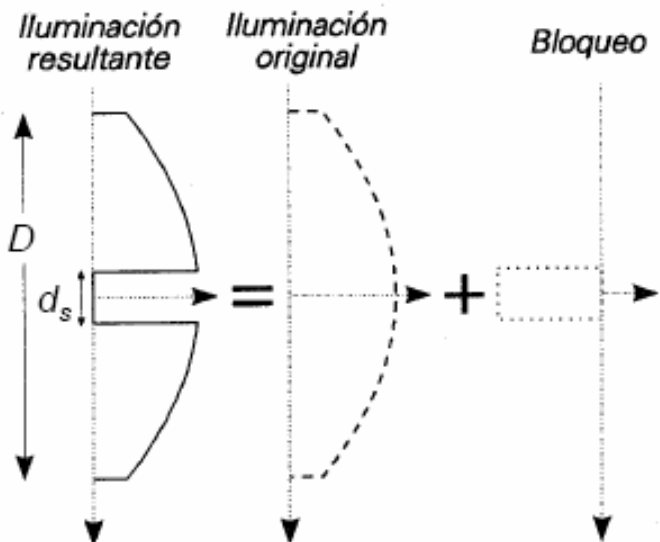
La finalidad de un reflector es la de concentrar la potencia radiada por el alimentador en una dirección del espacio con un diagrama de radiación que cumpla con las especificaciones, usualmente, de directividad y/o de NLPS. Por ello un parámetro muy relacionado es la eficiencia y dentro de él podemos definir:

Eficiencia de bloqueo

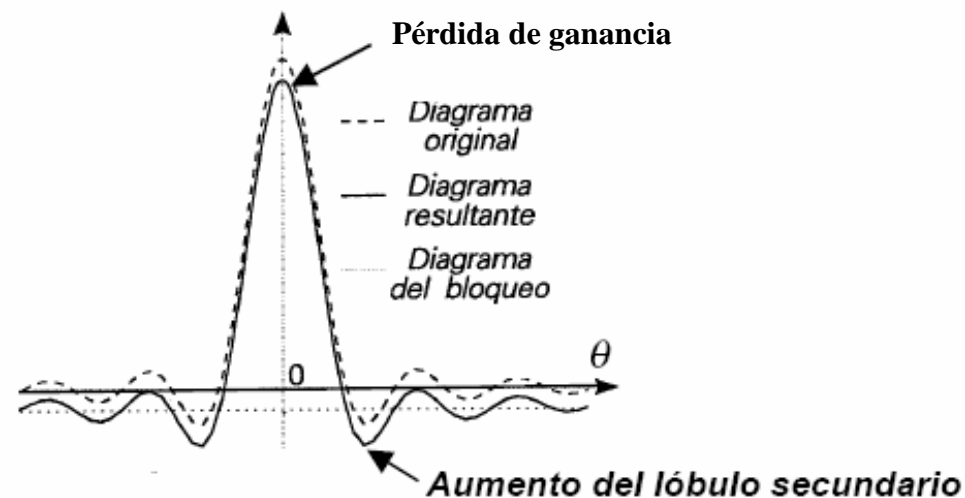
Se define la eficiencia de bloqueo como la relación entre la directividad o el área efectiva de las antenas con bloqueo o sin bloqueo. Se define el bloqueo como el obstáculo que presenta la alimentación (y sus soportes) para los rayos salientes del reflector. Para el caso de antenas tipo cassegrain o gregoriana hemos de tener en cuenta también el subreflector

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

El análisis del bloqueo se realiza suponiendo una iluminación sin bloqueo unida a una alimentación negativa en la zona de bloqueo



Principales Efectos:



$$\eta_{bl} = 20 \log \left(\frac{G}{G_0} \right) \approx 20 \log \left(1 - 2 \left(\frac{d_s}{D} \right)^2 \right)$$

El resultado del bloqueo es un aumento de los lóbulos secundarios lejanos. Como consecuencia, existe una pérdida de directividad en el reflector, dependiente de la zona de bloqueo producida por el subreflector o el alimentador.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Eficiencia de desbordamiento (spillover)

Se define la eficiencia de desbordamiento o spillover como la relación entre la potencia radiada que llega al reflector procedente del alimentador situado en el foco y la potencia total radiada por el alimentador

$$\eta_s = \frac{P_{refle}}{P_{rad}} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\beta G_f(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi G_f(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\beta G_f(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi$$

Como hemos visto anteriormente, el ángulo β depende del factor $f/D = 1/4 \cot(\beta/2)$ por lo que:

- el spillover es mayor para valores reducidos de, supuesto un alimentador fijo.
- fijado β , el spillover será mayor cuanto más directiva sea la antena del alimentador.

Eficiencia de iluminación o de apertura.

Establece la pérdida en ganancia debida a que la iluminación en la apertura no es uniforme. Como vimos en las antenas de apertura, esta eficiencia de iluminación particularizada a un reflector parabólico simple viene dada por:

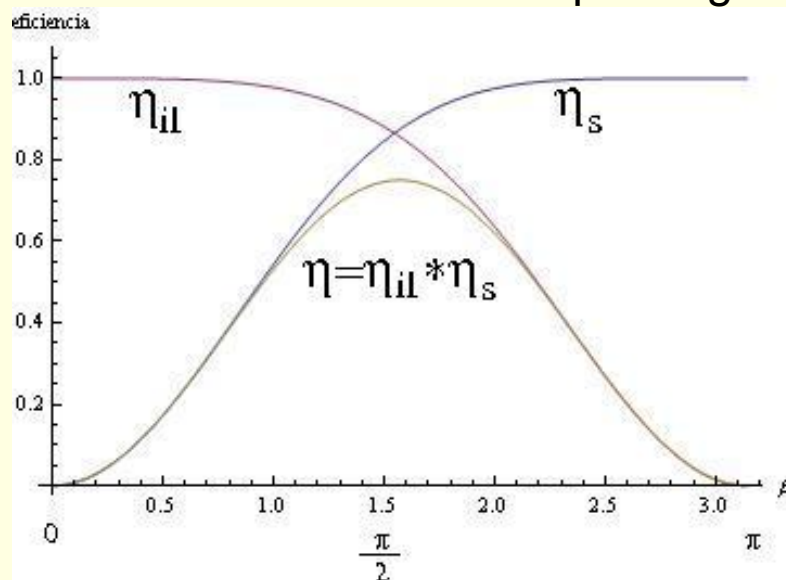
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$\eta_{il} = 32 \left(\frac{f}{D} \right)^2 \frac{\left| \int_0^\beta \sqrt{G(\theta)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \right|^2}{\int_0^\beta G(\theta) \sin(\theta) d\theta}$$

donde se hace uso de la relación f/D .

La eficiencia total será el producto de las eficiencias anteriores, esto es, $\eta = \eta_s \eta_{il}$

Para el caso de un reflector parabólico alimentado en su foco por una apertura elemental, la eficiencia total viene dada por la gráfica:



Para una apertura elemental, la ganancia viene dada por

$$G(\theta) = 3 \cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

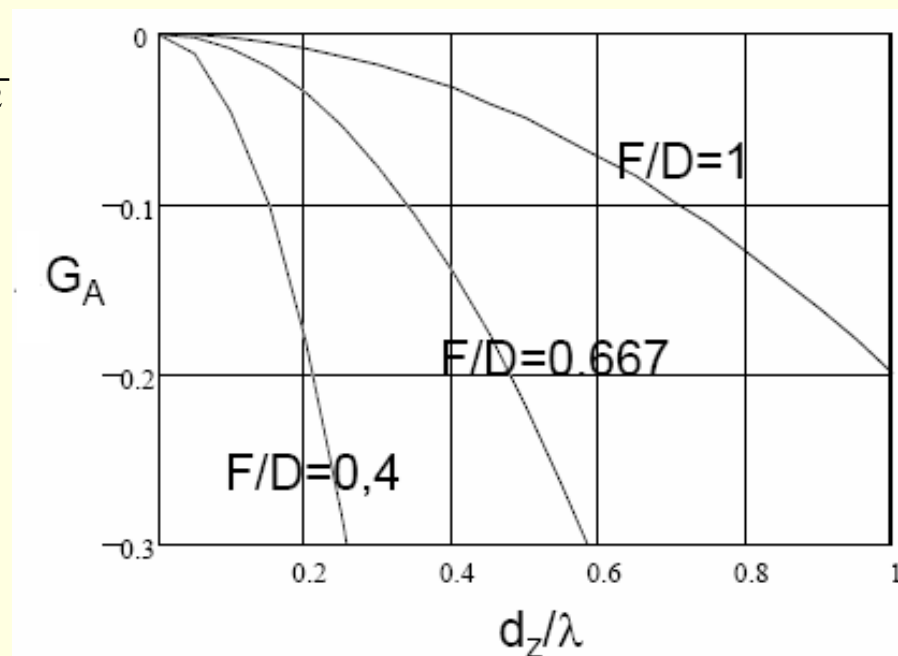
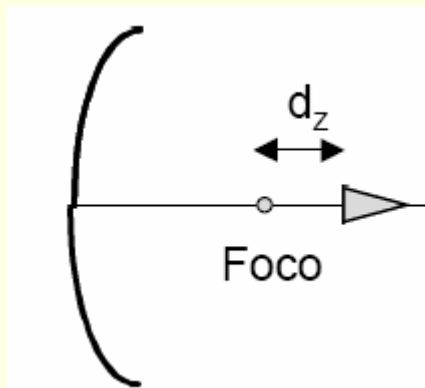
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Pérdidas por desplazamiento axial.

Las pérdidas en la ganancia debidas a un error en el posicionamiento de alimentado a lo largo del eje z fuera del punto del foco de la parábola, provoca un error en la fase del campo en la apertura. Además de la disminución de la ganancia, se produce un relleno en el nivel de los nulos del diagrama.

$$G_A(dB) = 20\log\left(\frac{\sin(X)}{X}\right) \quad \text{con } X = \frac{2\pi d_z}{1 + \left(\frac{4f}{D}\right)^2}$$

D_z es la distancia axial al foco



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

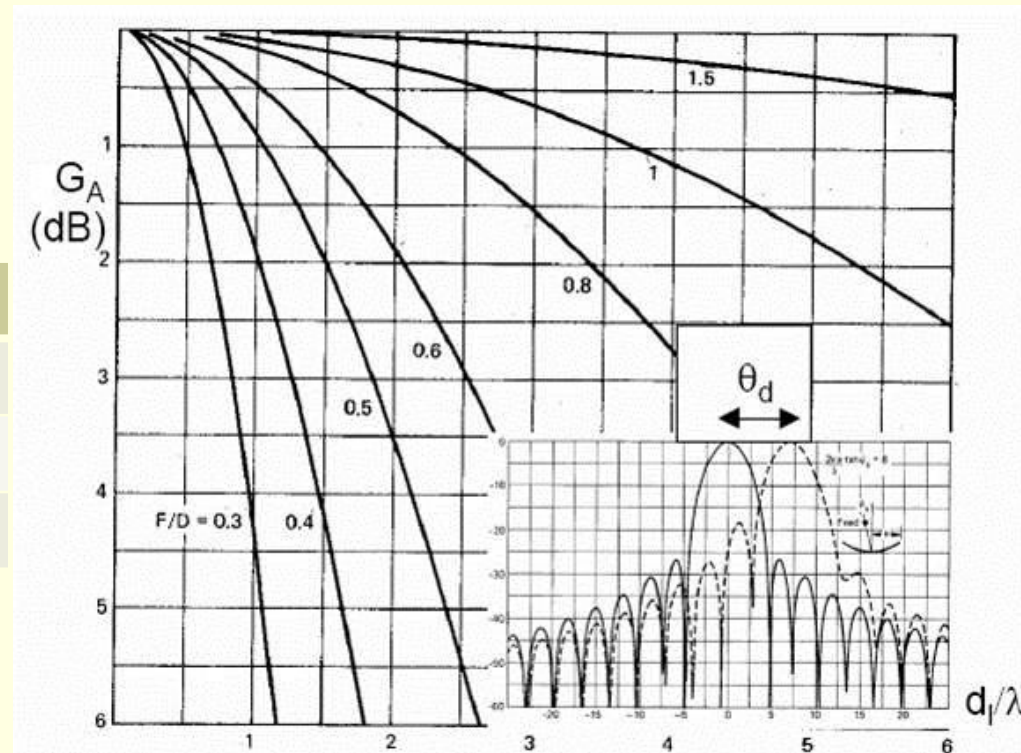
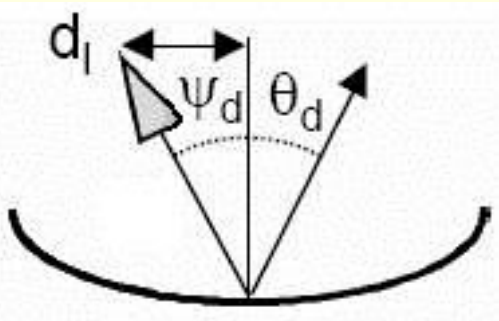
Pérdidas por desplazamiento lateral.

Pérdida de ganancia producida por un desplazamiento lateral de alimentador. Ello provoca un apuntamiento en sentido opuesto al desplazamiento, además de un incremento asimétrico de los lóbulos secundarios.

$$\theta_d = BDF \psi_d \quad \text{con} \quad \psi_d = \tan^{-1} \left(\frac{d_l}{F} \right)$$

Donde BDF es el beam deviation factor

F/D	BDF
0,40	0,82
1,00	0,96
2,00	0,99



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

La ganancia de la antena reflectora se calcula aplicando la expresión:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} S_a \eta$$

donde S_a es el área de la apertura y η la eficiencia total, producto de todas las eficiencias obtenidas anteriormente.

Para el caso de un reflector de apertura circular, la ganancia es

$$G = \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 \prod_i \eta_i$$

Donde η_i son las eficiencias:

- Eficiencia de iluminación
- Eficiencia de Spillover
- Eficiencia por bloqueo
- etc

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

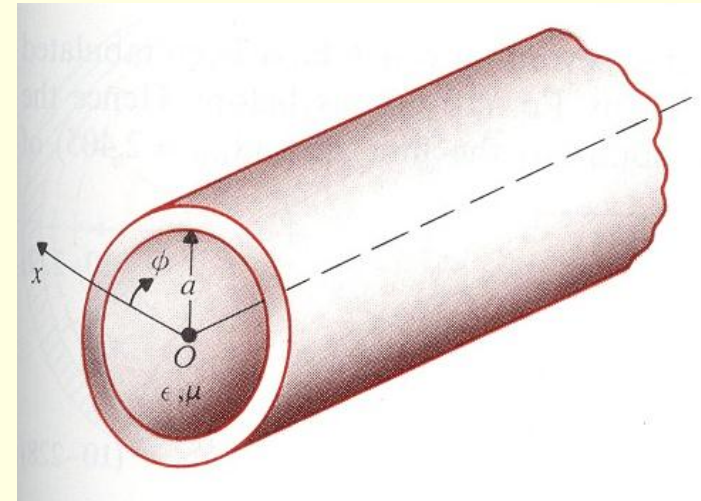
Anexo

1- Guías de ondas cilíndricas

Denominamos guía de ondas cilíndricas a una línea de transmisión de un solo conductor y cuya geometría es la mostrada en la figura.

Este tipo de guías son interesantes debido a:

1. son fáciles de construir.
2. Poseen baja atenuación en los modos TE_{0l} .
3. Poseen como inconveniente un solapamiento de su modos
4. Al igual que la rectangular soporta modos TE y TM.



Dada la geometría del problema es lógico usar coordenadas cilíndricas, por lo que la ecuación de ondas, ecuación de Helmholtz, será para los campos E y H

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

La ecuación de Helmholtz para la componente z del campo será en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon E_z = 0$$

Ensayando soluciones de variable separable $E_z = f(\rho)g(\phi)Z(z)$ y dividiendo por el producto de las tres funciones fgZ, se tiene

$$\frac{1}{f(\rho)} \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho f(\rho)} \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 g(\phi)} \frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon = 0$$

Esta ecuación nos indica que una suma de funciones independientes iguales a una constante implica que cada sumando es a su vez constante. La componente z será por tanto

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon = \gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu \epsilon$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Cuya solución es de la forma

$$Z(z) = A_1 e^{-\gamma z} + A_2 e^{+\gamma z}$$

Como la solución ha de ser finita cuando z es infinito esto implica que $A_2 = 0$

$$Z(z) = A_1 e^{-\gamma z}$$

Luego la ecuación nos queda de la forma

$$\frac{1}{f(\rho)} \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho f(\rho)} \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 g(\phi)} \frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial \phi^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) = 0$$

De igual forma para la componente azimutal se tiene

$$\frac{\rho^2}{f(\rho)} \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{f(\rho)} \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) \rho^2 = - \frac{1}{g(\phi)} \frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial \phi^2}$$

cuya solución es de la forma

$$g(\phi) = B_1 \cos(n\phi) + B_2 \text{sen}(n\phi)$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Con respecto a la componente radial, se tiene

$$\frac{\rho^2}{f(\rho)} \frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\rho}{f(\rho)} \frac{df(\rho)}{d\rho} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon - \frac{n^2}{\rho^2}) \rho^2 = 0$$

Multiplicando por f, se tiene

$$\rho^2 \frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{df(\rho)}{d\rho} + (h^2 \rho^2 - n^2) f(\rho) = 0$$

donde $h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon$

La ecuación radial corresponde a una ecuación de Bessel cuya solución es

$$f(\rho) = C_1 J_n(h\rho) + C_2 Y_n(h\rho)$$

donde C son constantes y J e Y son las funciones de Bessel de primera y segunda especie (a Y también se le denomina función de Newmann) y orden n

La función de Bessel de segunda especie se hace infinita en el origen ($\rho=0$) y dado que

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

el origen de coordenadas es inicio de nuestra guía, ésta no puede ser solución a nuestro problema por lo que necesariamente $C_2 = 0$

La solución general nos que de la forma

$$E_z(\rho, \phi, z) = A_1 e^{-\gamma z} (B_1 \cos(n\phi) + B_2 \sin(n\phi)) C_1 J_n(h\rho)$$

Dado la simetría azimutal del problema basta con tomar un ángulo ϕ adecuado tal que la solución azimutal pueda ser escrita, sin pérdida de generalidad, sólo con la función coseno (o función seno). La solución general nos queda

$$E_z(\rho, \phi, z) = A_1 B_1 C_1 J_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z} = E_0 J_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

Las demás soluciones pueden ser obtenidas mediante las ecuaciones de Maxwell, esto es

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

Veamos la ecuación de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\rho \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \left(\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z} \right] = -j\omega\mu (H_\rho \hat{\rho} + H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{z})$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

De igual forma, la ecuación de Ampère puede escribirse como

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\rho \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \left(\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z} \right] = j\omega\epsilon (E_\rho \hat{\rho} + E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{z})$$

Que nos suministra un conjunto de 6 ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial z} \right) &= -j\omega\mu H_\rho & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial z} \right) &= j\omega\epsilon E_\rho \\ \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) &= -j\omega\mu H_\phi & \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) &= j\omega\epsilon E_\phi \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) &= -j\omega\mu H_z & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) &= j\omega\epsilon E_z \end{aligned}$$

Expresando cada una de las componentes en términos de E_z y de H_z , se tiene por ejemplo para la componente radial del campo eléctrico

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$j\omega\epsilon E_\rho = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-\rho}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \right) \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial \rho}$$

Con respecto a las derivadas sobre la componente z se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim \gamma^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \sim -\gamma$$

Por lo que

$$j\omega\epsilon E_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} - \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{\gamma^2}{j\omega\mu} E_\rho + \frac{\gamma}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \Rightarrow$$

$$E_\rho = -\frac{j\omega\mu}{\rho h^2} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad \text{donde } h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

De igual manera se obtienen las demás componentes

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= -\frac{j\omega\mu}{\rho h^2} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \\
 E_\phi &= \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{\gamma}{\rho h^2} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \\
 E_z &= E_0 J_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z} \\
 H_\rho &= \frac{j\omega\varepsilon}{\rho h^2} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \\
 H_\phi &= -\frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} - \frac{\gamma}{\rho h^2} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \\
 H_z &= H_0 J_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}
 \end{aligned}$$

Donde $h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon$

✓ **Modos transversales magnéticos (TM).**

En este modo la componente sobre el eje z del campo H es cero por lo que las demás componentes de los campos **E** y **H** serán

$$E_\rho = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\frac{\gamma}{h} E_0 J'_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$E_\phi = -\frac{\gamma}{\rho h^2} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = \frac{\gamma}{\rho h^2} n E_0 J_n(h\rho) \sin(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$E_z = E_0 J_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$H_\rho = \frac{j\omega\varepsilon}{\rho h^2} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = -\frac{j\omega\varepsilon}{\rho h^2} n E_0 J_n(h\rho) \sin(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$H_\phi = -\frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\frac{j\omega\varepsilon}{h} E_0 J'_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$H_z = 0$$

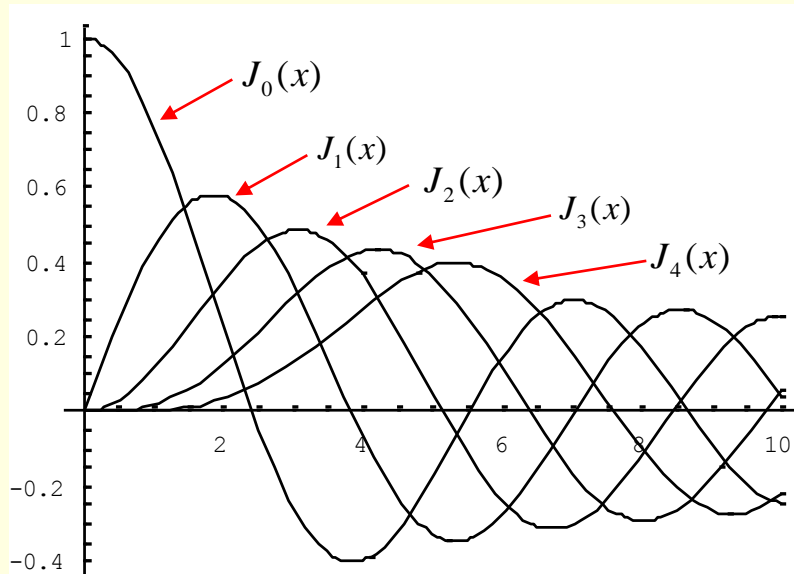
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Estas expresiones han de cumplir las condiciones de contorno, esto es, la componente tangencial de E ha de ser cero en $\rho=a$

$$E_z(a, \phi) = 0 = E_0 J_n(ha) \cos(n\phi) e^{-\gamma z} \Leftrightarrow J_n(ha) = 0$$

La gráfica corresponde a la función de Bessel para los 4 primeros ordenes. Como se puede ver existen infinitos valores que hacen cero la función de Bessel. Si llamamos t_{nl} a la raíz de orden l de la ecuación $J_n(h\rho)=0$ los valores propios son

$$h_{TM_{nl}} = \frac{t_{nl}}{a}$$



$\begin{matrix} n \\ l \end{matrix}$	0	1	2	3
1	2.40	3.83	5.14	6.38
2	5.52	7.02	8.42	9.76
3	8.65	10.17	11.62	13.02
4	11.79	13.32	14.80	16.20

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Las ecuaciones que describen las diferentes componentes del campo E y H son

$$E_{\rho} = -\frac{\gamma a}{t_{nl}} E_0 J_n \left(\frac{t_{nl}}{a} \rho \right) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$E_{\phi} = \frac{\gamma a^2 n}{\rho t_{nl}^2} E_0 J_n \left(\frac{t_{nl}}{a} \rho \right) \sin(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$E_z = E_0 J_n \left(\frac{t_{nl}}{a} \rho \right) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$H_{\rho} = -\frac{j\omega\epsilon a^2 n}{\rho t_{nl}^2} E_0 J_n \left(\frac{t_{nl}}{a} \rho \right) \sin(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$H_{\phi} = -\frac{j\omega\epsilon a}{t_{nl}} E_0 J_n \left(\frac{t_{nl}}{a} \rho \right) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$H_z = 0$$

✓ **Modos transversales eléctricos (TE).**

En el modo TE es la componente z del campo eléctrico la que es cero por lo que las expresiones de los campos son

$$E_{\rho} = -\frac{j\omega\mu}{\rho h^2} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \quad ; \quad H_{\rho} = -\frac{\gamma}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

$$E_{\phi} = \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \quad ; \quad H_{\phi} = -\frac{\gamma}{\rho h^2} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}$$

$$E_z = 0 \quad ; \quad H_z = H_0 J_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

Tomando la componente Hz como la solución de la ecuación de Helmholtz, las demás componentes de los campos vendrán dadas por

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$E_{\rho} = \frac{j\omega\mu}{\rho h^2} n H_0 J_n(h\rho) \sin(n\phi) e^{-\gamma z} \quad ; \quad H_{\rho} = -\frac{\gamma}{h} H_0 J'_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$E_{\phi} = \frac{j\omega\mu}{h} H_0 J'_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z} \quad ; \quad H_{\phi} = \frac{\gamma}{\rho h^2} n H_0 J_n(h\rho) \sin(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$E_z = 0 \quad ; \quad H_z = H_0 J_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

Imponiendo las condiciones de contorno sobre la componente tangencial del campo E (componente azimutal) $E_{\phi}(a, \phi) = 0$ y dado que ésta es proporcional a $\left. \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = 0$ se tiene que,

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = h H_0 J'_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z} \Big|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow J'_n(ha) = 0$$

y al igual que ocurría con el modo TM existen infinitos autovalores de esta ecuación tal que

$$h_{TE_{nl}} = \frac{s_{nl}}{a} \quad \text{donde } s_{nl} \text{ son los ceros de la derivada de la función de Bessel.}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Algunos valores de s_{nl} viene dados en la siguiente tabla

$\begin{array}{c} n \\ \backslash \\ l \end{array}$	0	1	2	3
1	3.832	1.841	3.054	4.201
2	7.016	5.331	6.706	8.015
3	10.173	8.536	9.969	11.346
4	13.324	11.706	13.170	14.586

La expresión general de los campos será

$$E_{\rho} = \frac{j\omega\mu a^2 n}{\rho s_{nl}^2} H_0 J_n\left(\frac{s_{nl}}{a} \rho\right) \sin(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$E_{\phi} = -\frac{j\omega\mu a}{s_{nl}} H_0 J'_n\left(\frac{s_{nl}}{a} \rho\right) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$E_z = 0$$

$$H_{\rho} = -\frac{\gamma a}{s_{nl}} H_0 J'_n\left(\frac{s_{nl}}{a} \rho\right) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$H_{\phi} = \frac{\gamma a^2 n}{\rho s_{nl}^2} H_0 J_n\left(\frac{s_{nl}}{a} \rho\right) \sin(n\phi) e^{-\gamma z}$$

$$H_z = H_0 J_n\left(\frac{s_{nl}}{a} \rho\right) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

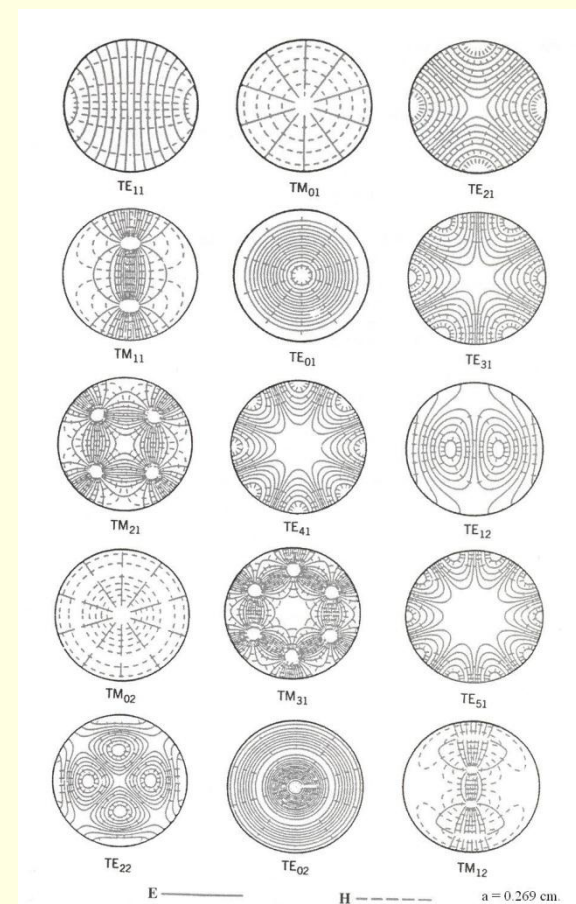
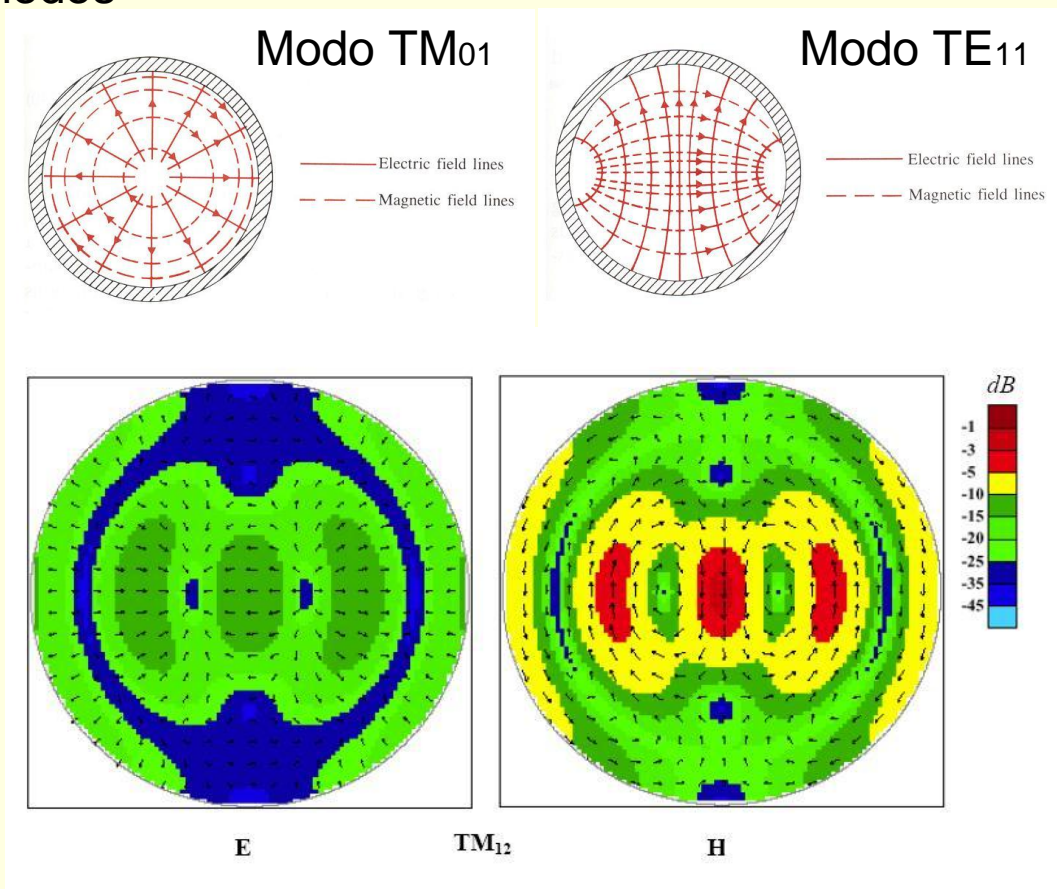
De cada pareja de valores n, l nos da un modo propagativo diferente pero como puede verse de la expresión de los campos el modo $n=0$ y $l=0$ y los modos $l=0$ para cualquier valor de n son modos evanescentes, esto es

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 1, 2, 3, \dots$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Como ejemplo, se representan algunos campos en la guía cilíndrica para diferentes modos



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

✓ Características de propagación. Frecuencia de corte

La constante de propagación viene dada por

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow \gamma^2 = h^2 - \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow \gamma_{TM}^2 = \left(\frac{t_{nl}}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow \gamma_{TM} = \sqrt{\left(\frac{t_{nl}}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

Al igual que ocurría con la guía rectangular, en función de la frecuencia, se pueden dar diferentes características de propagación

1. Modo de corte

En este caso la frecuencia en la guía es igual

$$\omega_c^2 \mu \epsilon = \left(\frac{t_{nl}}{a} \right)^2 \Rightarrow \gamma_{TM} = 0 \Rightarrow f_{c_{TM_{nl}}} = \frac{t_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

que se denomina frecuencia de corte y a la que le corresponde una longitud de onda de

$$\lambda_{c_{TM_{nl}}} = \frac{2\pi a}{t_{nl}}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Al igual que ocurre con la guía rectangular esta frecuencia corresponde al límite en el cual puede haber o no propagación, esto es la propagación ocurrirá cuando $f > f_{c_{TM_{nl}}}$

De igual forma, para el modo TE, se define la frecuencia de corte como aquella en la que la constante de propagación se hace cero, esto es,

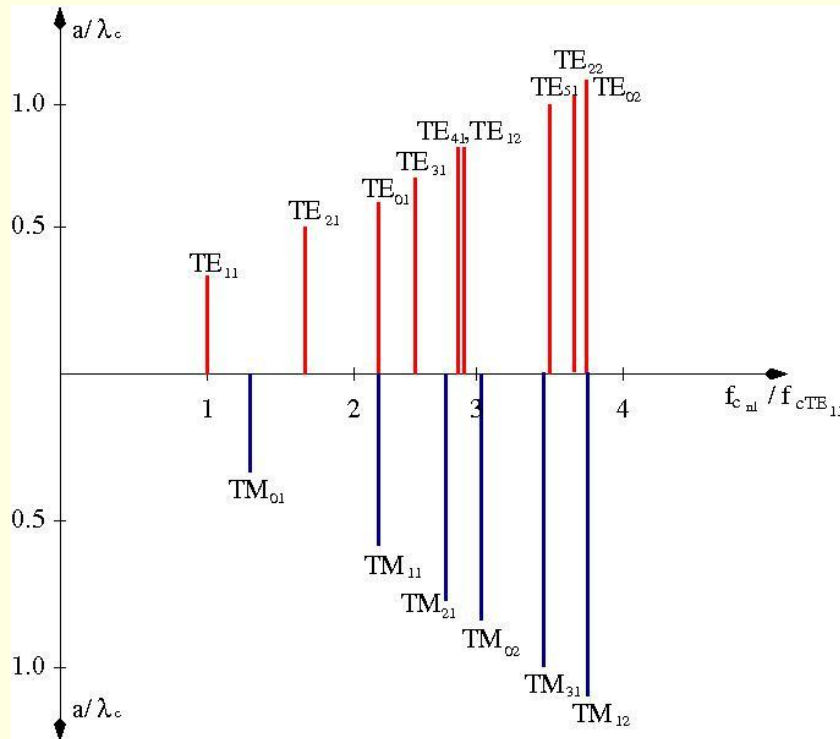
$$\omega_c^2 \mu \epsilon = \left(\frac{s_{nl}}{a} \right)^2 \Rightarrow \gamma_{TE} = 0 \Rightarrow f_{c_{TE_{nl}}} = \frac{s_{nl}}{2\pi a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

y le corresponde una longitud de onda $\lambda_{c_{TE_{nl}}} = \frac{2\pi a}{s_{nl}}$

Definimos modo dominante aquel en el que la frecuencia de corte es menor. Observando las tablas de la función de Bessel y de su derivada podemos ver que el cero de menor valor corresponde al modo TE₁₁ y por tanto éste será el modo dominante en una guía circular.

En la siguiente figura se representa las frecuencias de corte en función de la frecuencia de corte del modo dominante.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores



2. Modo evanescente

En este caso la frecuencia cumple la relación

$$\omega^2 \mu \epsilon < \left(\frac{t_{nl}}{a} \right)^2 \Rightarrow \gamma_{TM} \text{ es real} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\omega^2 \mu \epsilon < \left(\frac{s_{nl}}{a} \right)^2 \Rightarrow \gamma_{TE} \text{ es real} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Dado que la constante de fase es cero y no lo es la de atenuación, este modo sería no propagativo o modo evanescente.

3. Modo propagativo

En este caso la frecuencia cumple la relación

$$\omega^2 \mu \epsilon > \left(\frac{t_{nl}}{a} \right)^2 \Rightarrow \gamma_{TM} \text{ es imaginaria pura} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases} \quad \left| \quad \omega^2 \mu \epsilon > \left(\frac{s_{nl}}{a} \right)^2 \Rightarrow \gamma_{TE} \text{ es imaginaria} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases} \right.$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Para este caso se tiene,

$$\beta_{TM} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{t_{nl}}{a}\right)^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \omega_c^2 \mu \epsilon} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTMnl}}{f}\right)^2}$$

$$\beta_{TE} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{s_{nl}}{a}\right)^2} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \omega_c^2 \mu \epsilon} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTEnl}}{f}\right)^2}$$

Donde v es la velocidad de fase de una onda plana propagándose en un medio con constantes ϵ, μ

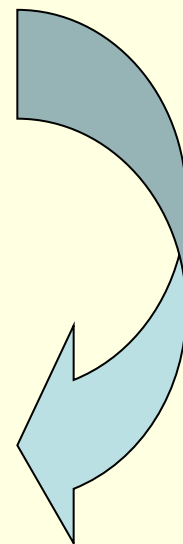
Las velocidades de fase y grupo serán,

$$v_p^{TM} = \frac{\omega}{\beta_{TM}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTMnl}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTMnl}}{f}\right)^2}}$$

$$v_p^{TE} = \frac{\omega}{\beta_{TE}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTEnl}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTEnl}}{f}\right)^2}}$$

$$v_g^{TM} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTMnl}}{f}\right)^2}$$

$$v_g^{TE} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cTEnl}}{f}\right)^2}$$



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Con respecto a la longitud de onda en la guía se tiene

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_g^{TM} = \frac{2\pi}{\beta_{TM}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f_{TM_{nl}}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{TM_{nl}}}{f}\right)^2}} \\ \lambda_g^{TE} = \frac{2\pi}{\beta_{TE}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f_{TE_{nl}}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{TE_{nl}}}{f}\right)^2}} \end{cases}$$

Con respecto a las impedancias de cada modo se tiene,

$$Z_{TM} = \frac{E_\rho}{H_\phi} \Big|_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{j\beta_{TM}}{j\omega\epsilon} = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TM_{nl}}}}{f}\right)^2}}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TM_{nl}}}}{f}\right)^2} = Z \sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TM_{nl}}}}{f}\right)^2}$$

$$Z_{TE} = \frac{E_\rho}{H_\phi} \Big|_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{j\beta_{TE}} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TE_{nl}}}}{f}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TE_{nl}}}}{f}\right)^2}} = \frac{Z}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TE_{nl}}}}{f}\right)^2}}$$

Con Z la impedancia característica de una onda plana propagándose en un medio con constantes ϵ, μ .

Al igual que ocurre en la rectangular se tiene

$$Z = \sqrt{Z_{TE} Z_{TM}}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

✓ Potencia transmitida. Pérdidas. Atenuación

La atenuación en guías circulares debida a las paredes conductoras se calcula de igual forma que en el caso de guías rectangulares, esto es mediante su relación con las potencias.

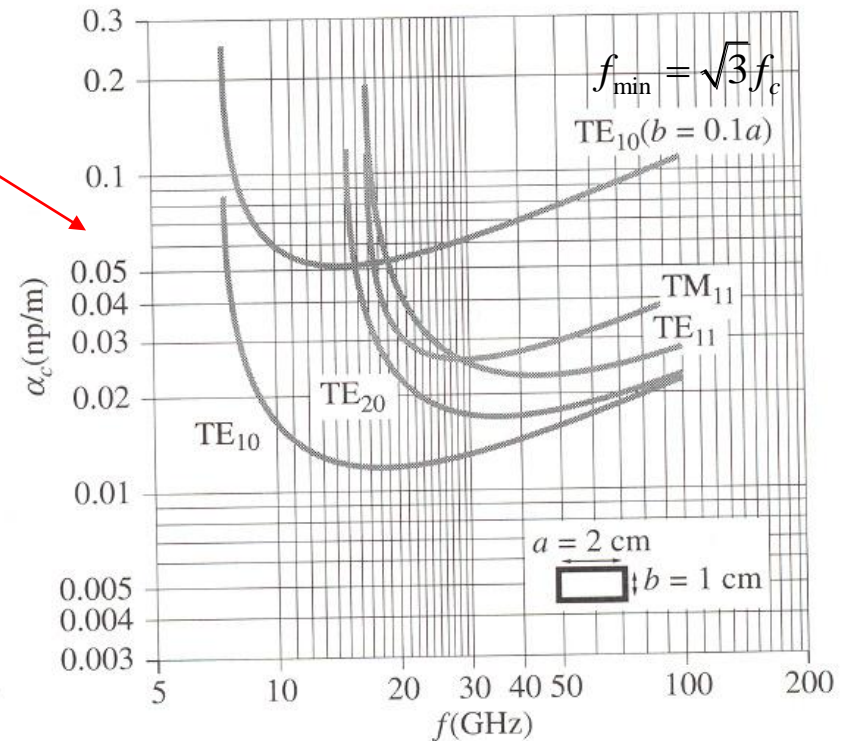
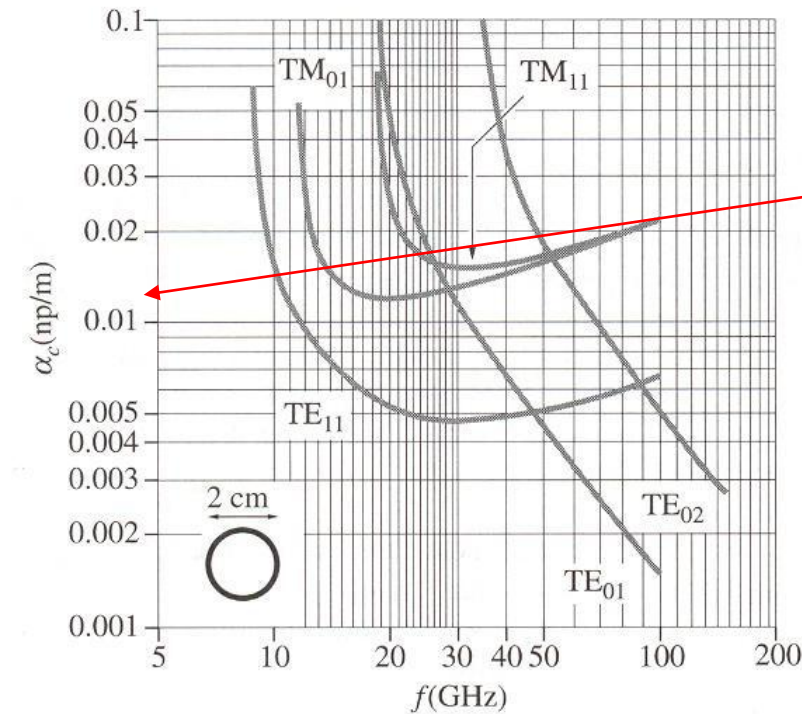
De igual forma a como se hace en rectangulares, se tiene,

$$\text{Modos TM} \\ \alpha_c^{TM} = \frac{R_s}{aZ} \left[1 - \left(\frac{f_{c_{TM_{nl}}}}{f} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\text{Modos TE} \\ \alpha_c^{TE} = \frac{R_s}{aZ \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{TM_{nl}}}}{f} \right)^2}} \left[\left(\frac{f_{c_{TM_{nl}}}}{f} \right)^2 + \frac{n^2}{s_{nl}^2 - n^2} \right]$$

En la gráfica siguiente se representa la atenuación para cada modo en función de la frecuencia (valores en dB basta con multiplicar por 8.69)

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores



Como puede verse, la atenuación decrece con la frecuencia hasta un valor de f_{\min} . A partir de esta frecuencia, la atenuación crece indefinidamente con la frecuencia.

Como puede verse de la figura, ocurre igual para los modos TE.

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Si comparamos con una gráfica de atenuación frente a la frecuencia en una guía rectangular, se observa

- Menor atenuación en una guía circular que en una rectangular
- En la guía circular, en el ancho de banda entre 9.7GHz y 12.5 GHz sólo se propaga el modo fundamental, mientras que en la rectangular es de [8GHz y 15GHz]

2. Cavidades resonantes

En la banda de UHF y frecuencias superiores ($f > 300\text{MHz}$) no se suelen usar como resonadores circuitos basados en elementos concentrados (R, L y C) sino que se suelen usar guías de ondas cortocircuitadas en sus extremos (dirección z). A tales dispositivos se les denominan cavidades resonantes. La razón de esta elección es muy diversa destacando básicamente:

1. Son más fáciles de construir.
2. Presentan un factor de calidad muy superior (30.000) a los resonadores contruidos con elementos concentrados (300).

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

El uso de las cavidades resonantes está muy extendido, destacando las siguientes:

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Almacén de energía electromagnética• Medidas de frecuencias con gran precisión• Filtrado de señales | <ul style="list-style-type: none">• Adaptación de impedancias• Producción de campos electromagnéticos de alta energía• Detectores de humo. |
|---|--|

Existen muchos tipos de cavidades y usualmente se construyen a partir de guías de ondas, por lo que nosotros estudiaremos aquellas cavidades basadas en guías rectangulares y cilíndricas.

✓ Resonadores rectangulares

Consideremos una guía de ondas rectangular, de dimensiones $a \times b$ a la que se le coloca dos tapas conductoras en las posiciones $z = 0$ y $z = d$ tal y como se muestra en la figura.

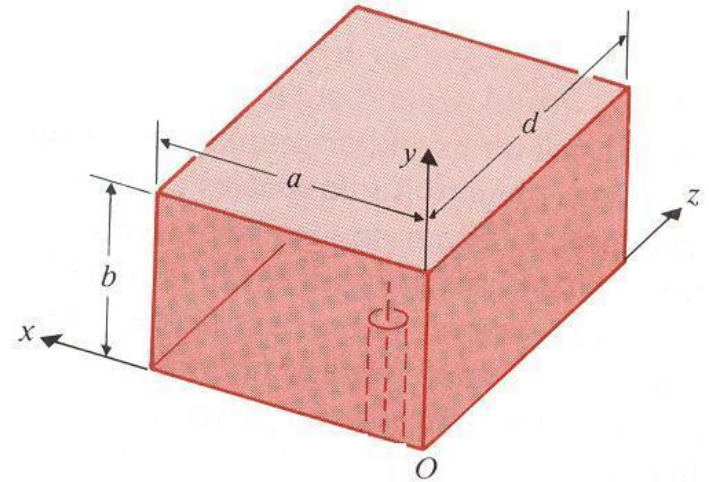
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Las paredes de la cavidad son metálicas y el interior está relleno de un dieléctrico con constantes ϵ, μ .

La solución a este problemas la podemos encontrar considerando a la cavidad como una sección de una guía de ondas estándar comenzada y terminada en cortocircuito. Dado que en la guía los únicos modos que se propagan son TM y TE, es lógico pensar que en la cavidad

sean también éstos los que se propaguen aunque esta nomenclatura no sea muy apropiada para el problema en cuestión, se seguirá hablando de modos TM y TE en el sentido de tomar como referencia de dirección de propagación la dirección z.

A diferencia de la guía, en la cavidad será necesaria tomar un nuevo subíndice correspondiente a la dirección z, por lo que los modos de los campos serán los TM_{mnp} y los TE_{mnp} .



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

➤ Modos TM_{mnp}

En este modo la componente H_z del campo es cero y las demás componentes vienen dadas por

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \\ E_y &= -\frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) E_0 \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \\ E_z &= E_0 \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \end{aligned} \right| \begin{aligned} H_x &= \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) E_0 \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \\ H_y &= -\frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) e^{-\gamma z} \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

cumpliendo las condiciones de contorno $E_z = 0$ en $x=0$; $E_z = 0$ en $y=0$
 $E_z = 0$ en $x=a$; $E_z = 0$ en $y=b$

En una cavidad, además ha de cumplir que las componentes transversales (E_x y E_y) han de ser cero en $z=0$ y $z=d$. Imponer estas condiciones supone considerar una reflexión total en dichas paredes por lo que ha de existir una onda reflejada de igual

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

amplitud (supuesto conductores perfectos, $\Gamma=-1$) y propagándose en sentido del eje $-z$. Aplicando el principio de superposición y las condiciones de contorno se tiene que la variación respecto a la coordenada z ha de ser del tipo sinusoidal con $\beta=p\pi/d$. Las expresiones de las componentes de los campos en la cavidad son

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{p\pi}{d} \right) E_0 \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \\ E_y &= -\frac{1}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(\frac{p\pi}{d} \right) E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \\ E_z &= E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \\ H_x &= \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \\ H_y &= -\frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos \left(\frac{p\pi z}{d} \right) \\ H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ con } h^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Con respecto a la constante de propagación, en un medio sin pérdidas, se tiene

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

La frecuencia a la cual la constante de propagación es cero, se denomina frecuencia de resonancia y viene dada por

$$(\omega_0^{mnp})^2 \mu\varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \rightarrow \omega_0^{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

o bien

$$f_0^{mnp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}$$

➤ Modos TE_{mnp}

Para el modo TE_{mnp} ($E_z=0$) las expresiones fasoriales para las componentes de la onda estacionaria pueden ser escritas de igual forma a como se hizo con la guía rectangular (con las mismas salvedades que en el caso anterior). La condición de contorno es que

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

la componente transversal (tangencial) del campo eléctrico ha de ser cero en $z=0$ y $z=d$. Para este caso las componentes E_x , E_y y H_z poseen un término seno como dependencia en la coordenadas z y las componentes H_x y H_y poseen un coseno para la variable z y además sustituimos γ por $-(p\pi/d)$. Con estas consideraciones se tiene

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi z}{d} \right) \\ E_y &= -\frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi z}{d} \right) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} H_x &= -\frac{1}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{p\pi}{d} \right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos\left(\frac{p\pi z}{d} \right) \\ H_y &= -\frac{1}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(\frac{p\pi}{d} \right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos\left(\frac{p\pi z}{d} \right) \\ H_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi z}{d} \right) \end{aligned}$$

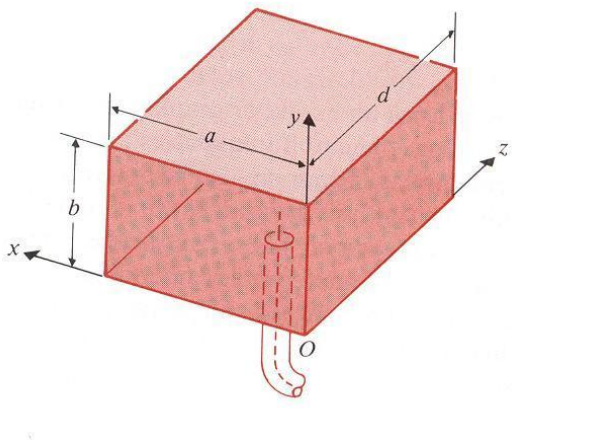
con h el mismo valor que en el modo TM, esto es, $h^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ y por tanto la misma frecuencia de resonancia que en el modo TM. Los modos que poseen la misma frecuencia de resonancia se les denominan modos degenerados. El modo con menor frecuencia de resonancia para una cavidad dada se denomina modo dominante.

Un modo particular en una cavidad resonante (o en una guía) puede ser excitada desde una línea coaxial por una pequeña sonda o mediante una antena de lazo. Una sonda introducida en la cavidad actúa como antena que acopla la energía electromagnética

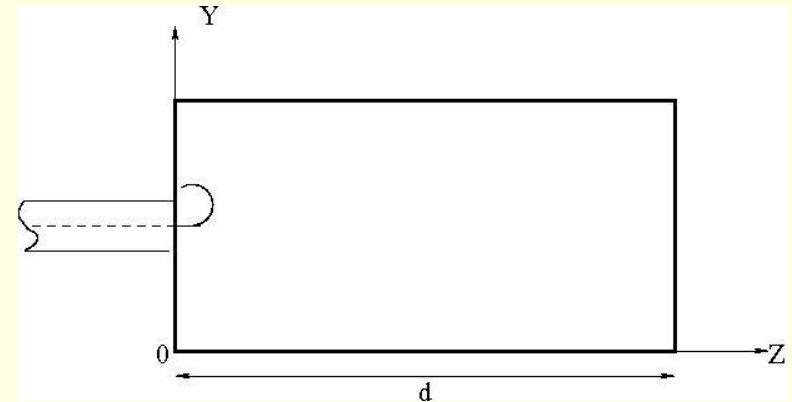
Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

dentro de la cavidad resonante.

Por ejemplo para excitar el modo TE_{101} (en este modo sólo existen las componentes E_y , H_x y H_z) en una cavidad de dimensiones $a \times b \times d$, la sonda se insertará en el centro de la cara inferior (o superior) donde la componente E_y es máxima, tal y como se muestra en la figura (a), o bien si se hace con una antena de lazo, la componente H_x será máxima en el centro de la cara frontal (o en su cara opuesta) tal y como se muestra en la figura (b)



(a)



(b)

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

➤ Factor de calidad de una cavidad resonante

Como ya se ha comentado, una cavidad resonante almacena energía eléctrica y magnética para un modo en particular. En las cavidades reales, las paredes son fabricadas con conductores con conductividades finitas y por tanto con una resistencia superficial que no es cero. En este sentido, en una cavidad existe una pérdida de energía debido principalmente a esta resistencia superficial.

Denominamos factor de calidad, Q , de un resonador como una media del ancho de banda en el que actúa el resonador (nos da idea de la energía total almacenada en él).

$$Q = 2\pi \frac{\text{máxima energía almacenada a la frecuencia de resonancia}}{\text{energía disipada por ciclo}}$$

Si W es la energía total almacenada en una cavidad, ésta puede escribirse como

$$W = W_e + W_m$$

donde W_e y W_m son las energías almacenadas en el campo eléctrico y magnético respectivamente. Si P_L es la potencia promedio disipada en las paredes de la cavidad,

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

el factor de calidad será

$$Q = 2\pi f \frac{W}{P_L} = \omega \frac{W_e + W_m}{P_L}$$

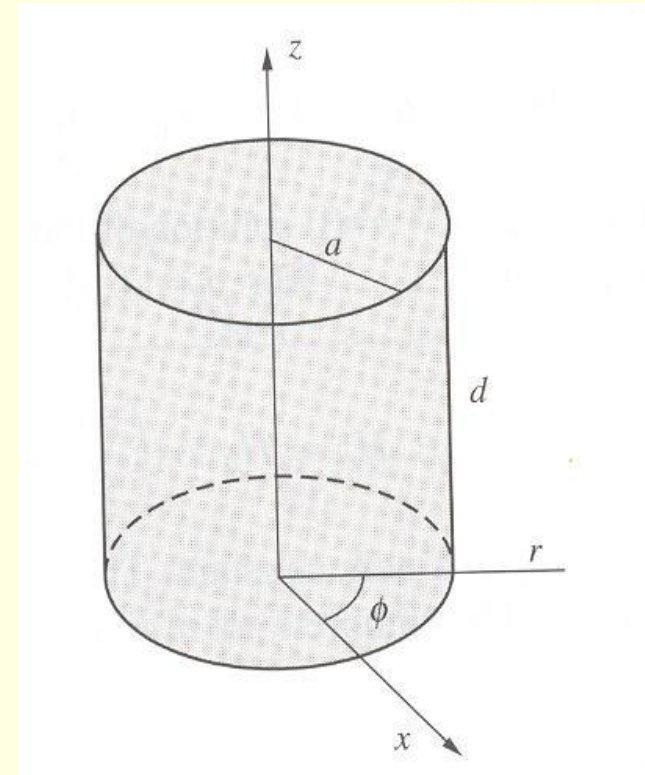
A la frecuencia de resonancia, el factor de calidad es $Q = \omega_0 \frac{2W_e}{P_L}$ y, por ejemplo, para el modo TE₁₀₁, se tiene

$$Q_{101} = \frac{\pi f_{101} \mu_0 a b d (a^2 + d^2)}{R_s (2b(a^3 + d^3) + ad(a^2 + d^2))}$$

✓ Resonadores cilíndricos

De forma similar a como se ha estudiado los resonadores rectangulares, lo podemos hacer para los cilíndricos, esto es, partiendo de una guía cilíndrica colocaremos paredes conductoras en $z=0$ y en $z=d$ tal y como se muestra en la figura.

El modo resonante dependerá de cómo se ha excitado la cavidad y de la aplicación para la cual está destinada.



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Sin pérdida de generalidad, estudiaremos el modo TE_{011} en la cavidad cilíndrica ya que este modo presenta un factor de calidad muy alto, bajas pérdidas y unas características de los campos electromagnéticos muy interesantes para la construcción de frecuencímetros de cavidad.

Para la construcción de esta cavidad partiremos de una guía cilíndrica excitada en el modo de bajas pérdidas TE_{01} a la cual le permitiremos una variación en medio periodo ($p=1$) en la dirección del eje z .

Para el modo general TE_{nl} , la componente z del campo magnético tiene la forma

$$H_z = H_0 J_n(h\rho) \cos(n\phi) e^{-\gamma z}$$

Para el modo TE_{01} se tiene

$$H_z = H_0 J_0\left(\frac{s_{01}}{a} \rho\right) e^{-\gamma z}$$

Si además le permitimos que la onda viaje en dirección al eje $-z$ con la misma amplitud con la que viaja en dirección contraria, se tiene aplicando superposición

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

$$H_z = C^+ J_0 \left(\frac{s_{01}}{a} \rho \right) e^{-\gamma z} + C^- J_0 \left(\frac{s_{01}}{a} \rho \right) e^{+\gamma z}$$

Haciendo uso de las condiciones de contorno en $z=0$ y $z=d$, esto es,

$$H_z = 0 \Big|_{z=0,d} \Rightarrow C^+ = C^- \text{ y } \beta = \frac{p\pi}{d}$$

Sustituyendo, la expresión de la componente z del campo puede escribirse como

$$H_z = H_0 J_0 \left(\frac{3.832}{a} \rho \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{d} z \right)$$

las demás componentes son:

$$E_\phi = \frac{-j\omega\mu a H_0}{3.832d} J_1 \left(\frac{3.832}{a} \rho \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{d} z \right)$$

$$H_\rho = \frac{\pi a H_0}{3.832d} J_1 \left(\frac{3.832}{a} \rho \right) \cos \left(\frac{\pi}{d} z \right)$$

$$H_z = H_0 J_0 \left(\frac{3.832}{a} \rho \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{d} z \right)$$

donde se hace uso de la relación entre funciones de Bessel $J_1(x) = -J'_0(x)$

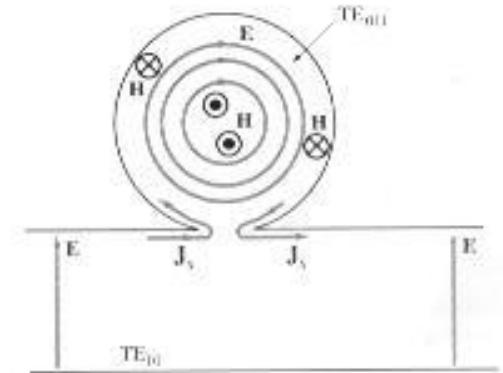
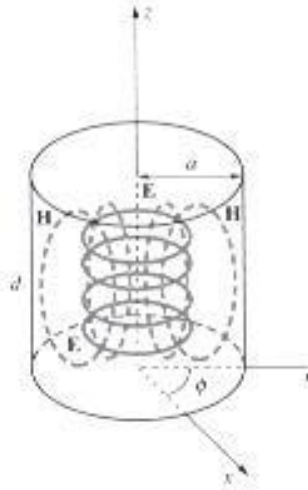
En la siguiente figura se muestra la forma de los campos E y H en el modo TE_{011} en la cavidad y como se excita el resonador mediante una guía rectangular trabajando en el modo TE_{10} .

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

De la forma de los campos, podemos observar que las líneas de campo **E** son líneas cerradas entorno al eje Z y atraviesan las líneas, también cerradas, de campo **H** en planos radiales. Como puede verse no aparecen densidades de carga en las paredes conductoras de la cavidad debido principalmente a que la componente radial del campo **E** es cero sobre las paredes. Con respecto a la densidad de corriente, ésta fluye por las paredes debido a la componente tangencial de **H** ($\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}$). Sobre las paredes curvas de la cavidad se tiene

$$J_{s\phi} = H_0 J_0(3.832) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{d}\right) \approx -0.403 H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{d}\right)$$

En los planos $z=0$ (solución +) y $z=d$ (solución -)
$$J_{s\phi} = \pm \frac{\pi a H_0}{3.832 d} J_1\left(\frac{3.832 \rho}{a}\right)$$



Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

De las expresiones anteriores se deduce que la corriente es circunferencial y no fluye corriente entre el plano (pared fija y émbolo en un frecuencímetro de cavidad) y las paredes curvas. De todo lo anterior se deduce que este modo TE_{011} es ideal para la fabricación de frecuencímetros de cavidad cilíndrica resonante, ya que dicho modo no se ve afectado por el movimiento de las paredes en su interior.

Al igual que ocurre con las cavidades resonantes rectangulares, una cavidad cilíndrica presentará una frecuencia de resonancia que para el modo TE_{011} viene dada por

$$\omega_{011} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{s_{01}}{a}\right)^2}$$

La longitud de onda para una cavidad vacía es

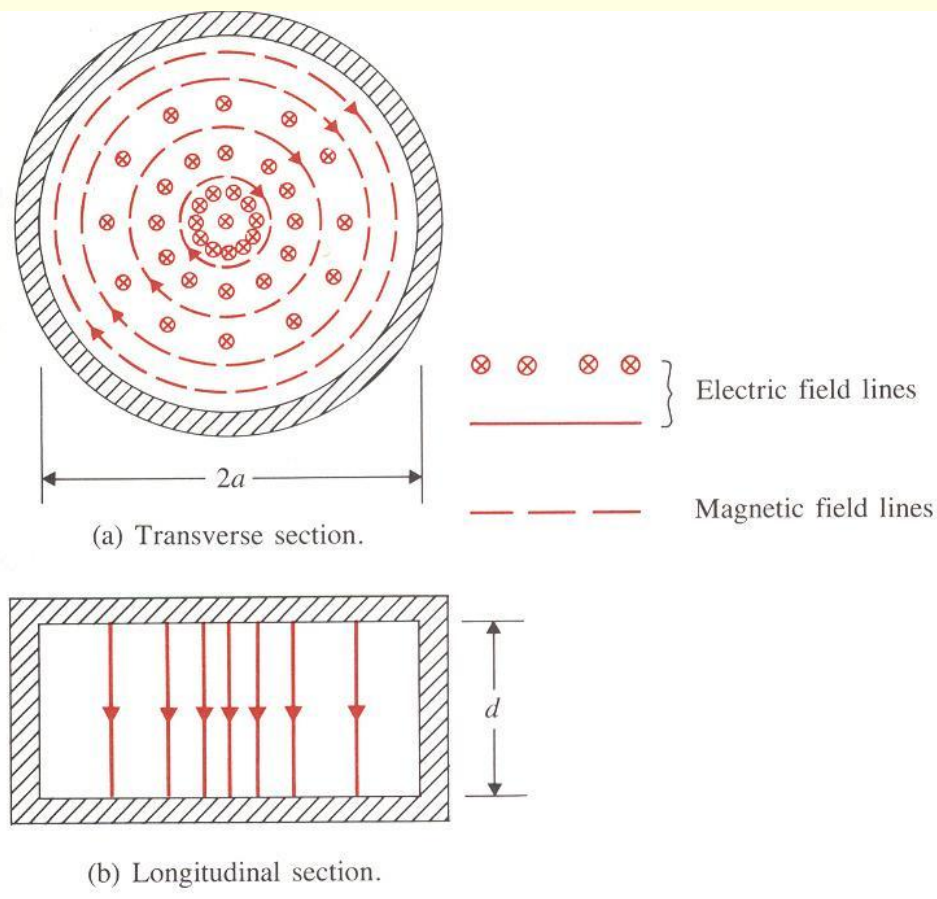
$$\lambda_{011} = \frac{c}{f_{011}} = \frac{c}{\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{s_{01}}{a}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{d}\right)^2 + \left(\frac{s_{01}}{\pi a}\right)^2}}$$

y para un modo nlp

$$\lambda_{nlp} = \frac{2}{\sqrt{(p/d)^2 + (s_{nl}/\pi a)^2}}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

La representación de los campos E y H en el modo TM_{010} en las secciones transversales y longitudinales puede verse en el gráfico siguiente



➤ Factor de calidad de una cavidad resonante cilíndrica

La definición del factor de calidad en una cavidad cilíndrica es la misma que para la cavidad rectangular, esto es

$$Q = 2\pi \frac{\text{máxima energía almacenada a la frecuencia de resonancia}}{\text{energía disipada por ciclo}} = \frac{\omega W}{P_L}$$

Para el modo TE viene dada por

$$Q_{nlp}^{TE} = \frac{1}{\delta} \frac{\frac{d}{2} \left[s_{nl}^2 + \left(\frac{\pi a}{d} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{l}{s_{nl}} \right)^2 \right]}{\frac{d}{2a} s_{nl}^2 + \left(\frac{\pi a}{d} \right)^2 + \left[\frac{a(d-2a)}{2d^2} \right] \left[\frac{\pi l}{s_{nl}} \right]^2}$$

Tema 6.- Antenas de Apertura, Bocinas y Reflectores

Bibliografía del anexo

- David M. Pozar, «Microwave Engineering», 3ª edición. Ed. John Wiley & Sons, 2005
- José M. Miranda et al, «Ingeniería de microondas», Ed. Prentice Hall, 2002
- Robert E. Collin, «Foundations for microwave engineering», 2ª edición, Ed. IEEE Press, 2001
- Robert S. Elliot, «An introduction to guided waves and microwave circuits», Ed. Prentice Hall, 1993